

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 31

A2. α) Σχολικό Βιβλίο σελ. 65

β) Σχολικό Βιβλίο σελ. 87

A3. α. ΛΑΘΟΣ

β. ΛΑΘΟΣ

γ. ΣΩΣΤΟ

δ. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με: $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

B2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow x \in (1, 5)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$

Και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ ίσο με το $f(1) = \frac{8}{3}$

Και τοπικό ελάχιστο για $x = 5$ ίσο με το $f(5) = -8$

B3) Έστω (ε) $y = \lambda x + \beta$ η εφαπτόμενη της Cf στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$.

$f(0) = \frac{1}{3}$, άρα έχουμε το $A(0, \frac{1}{3})$ ως σημείο επαφής.

$$\lambda = f'(0) = 5 \Rightarrow y = 5x + \beta$$

$A(0, \frac{1}{3}) \in (\varepsilon) \Rightarrow \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 5x + \frac{1}{3}$ η ζητούμενη ευθεία.

B4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = 12$ από τον ορισμό του ορίου της παραγώγου.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + 6x - 7$ είναι $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64$ και έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1 \text{ και } x_2 = \frac{-6-8}{2} = -7$$

Άρα $s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7)(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{2} = 4$

Γ2

Είναι $CV = 0.2 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0.2 \Leftrightarrow \bar{x} = 20$.

Γ3

Είναι $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{22+18+20+k+14+16}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90+k}{5} = 20 \Leftrightarrow k = 10$

Τα δεδομένα είναι 22,18,30,14,16 και σε αύξουσα σειρά γράφονται 14,16,18,22,30.

Έχουμε περιττό πλήθος δεδομένων άρα η διάμεσος είναι το μεσαίο, δηλαδή $\delta = 18$.

Γ4

Οι νέες τιμές της θερμοκρασίας $y_i = 1,1x_i$

Οπότε, οι νέες τιμές είναι $\bar{y} = 1.1 \cdot \bar{x}$ και $s_y = 1.1 \cdot s$ και τελικά

$$CV' = \frac{1.1s}{1.1\bar{x}} = CV = 0.2 = 20\%$$

ΘΕΜΑ Δ

$(OA) = x$, $(OB) = y$ και $(AB) = 10$

Δ1. Για $0 < x < 10$ εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OAB και έχω

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$$

$$\Leftrightarrow 100 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2$$

Επειδή $0 < x < 10$ τότε $y = \sqrt{100 - x^2}$

Επομένως $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$ άρα $A = (0, 10)$

Δ2. Ισχύει ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Επομένως

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{36}} = -\frac{4}{3}$$

Δ3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(6 - x)(6 + x)}{-(6 - x)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 + x}{-(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \frac{12}{-16} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Δ4.

Για $0 < x < 10$ η $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10)$.

Επίσης $x_1, x_2, x_3 \in (0, 10)$ με $x_1 < x_3 < x_2$

Επομένως $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

Επιμέλεια:

Πασχάλης Νίκας, Καραμπετάκη Δομνίκη, Σκουλάξενος Βαγγέλης, Νικηφόρος Μανώλης, Φορτούνη Μαρία-Ανδριάννα, Ελευθεράκης Παναγιώτης, Ανυφαντάκη Μαρίνα, Βαρδουλάκης Νίκος, Στάκα Ευαγγελία, Χασαλεύρης Θάνος

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Καβάλα, Διαδικτυακό, Μοσχάτο, Ηράκλειο Κρήτης, Κατερίνη, Περιστέρι Κέντρο

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ