

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου.

A2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου.

A3. Σελίδα 128 σχολικού βιβλίου.

A4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1)

$$\left. \begin{array}{l} x \in A_h \\ h(x) \in A_g \end{array} \right\} x > 0, \ln x \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow x > 0 \mid A_{g \circ h} = (0, +\infty)$$

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, \quad x > 0$$

B2)

f συνεχής στο $A=(0, +\infty)$ ως ρητή.

$$\text{i) } f'(x) = \frac{(4-x^2)' \cdot x - (4-x^2) \cdot x'}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

H f γν. φθίνουσα

$$\text{ii) } \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \xrightarrow[e>0]{4-e^2 < 0} \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \xrightarrow{f \downarrow} \pi > e \text{ ισχύει}$$

B3)

$$\bullet) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) \frac{1}{x} = 4(+\infty) = +\infty, \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη δεξιά του μηδενός.

$$\bullet) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\bullet) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2+x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα η $y=-x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

B4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = -\infty \text{ άρα } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } -\infty$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq 1 \xrightarrow{:f(x)} \frac{1}{f(x)} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq -\frac{1}{f(x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{f(x)} \right) = 0 \end{array} \right\} \text{απ' το κριτήριο παρεμβολής και το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1) \int_2^3 x f(x) dx = 1, \quad \int_2^3 (1+ax) dx = 1 \Leftrightarrow \left[x + \frac{ax^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{7a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\Gamma 2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ άρα η } f \text{ συνεχής στο } x=1.$$

F συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πολυώνυμο

F συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως ρητή

Άρα, η f συνεχής στο R.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

ΑΡΑ, η $f'(1)=-1$ και η εφαπτομένη της C στο $x_0=1$ ορίζεται.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο $x_0=1$ είναι $(\varepsilon) : y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$y-1=-1(x-1)$$

$$y=-x+2$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον $\chi\chi'$, τότε $\varepsilon\phi\omega=-1$ άρα $\omega=135^\circ$

Γ3

Για $x < 1$ $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Έτσι f γν. φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 1)$ και $f'(x) = 2x - 3 < 0$

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

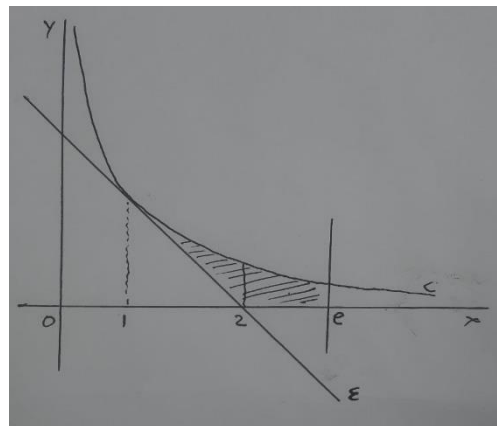
Για $x \geq 1$ $f(x) = \frac{1}{x}$. Έτσι f γν. φθίνουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$ και $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1]$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset \text{ και } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, +\infty)$$

Γ4

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 (f(x) + x - 2) dx + \int_2^e f(x) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\ln|x| \right]_2^e = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1)

$$\frac{\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k - 2x}{x-1} = g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \in \mathfrak{R}$$

$$\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k - 2x = g(x) \cdot (x-1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x-1)]$$

$$-3 + k = l \cdot 0 \Leftrightarrow -3 + k = 0 \Leftrightarrow k = 3$$

Δ2)

$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$, η f συνεχής στο $(0,2)$ ως πράξεις συνεχών.

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - x}{x^2(2-x)}$$

•) $-x^2 + 2 - x \rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9$, $x = \frac{1 \pm 3}{-2}$ $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$

•) $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

•) f συνεχής στο $A_1 = (0,1]$ και γν.αύξουσα άρα

$$f((0,1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

•) $0 \in f(A_1)$ άρα $\exists x_1 \in (0,1): f(x_1) = 0$ (μοναδικό λόγω μονοτονίας)

•) f συνεχής στο $A_2 = [1,2)$ και γν.φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

•) $0 \in f(A_2)$ άρα $\exists x_2 \in (1,2): f(x_2) = 0$ (μοναδικό λόγω μονοτονίας)

•) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) > 0 = f(x_1)$

f γν.αύξουσα άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3)

$$\text{Αρκεί } f(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1} \quad \xi \in (0,1)$$

• f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ και f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

$$\bullet) \text{Απο το Θ.Μ.Τ. } \exists \xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1): f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Δ4)

$$i) \left. \begin{array}{l} G'(x) = f(x) = F'(x) \\ F(x_1) = 0 = G(x_2) \end{array} \right\} G'(x) = F'(x) \text{ άρα } \exists c \in \mathbb{R}: F(x) = G(x) + c$$

$$\xrightarrow{x=x_1} F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow c = -G(x_1)$$

$$\xrightarrow{x=x_2} F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

$$ii) x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x = H(x)$$

• H συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών.

$$H(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$$

$$H(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1(-G(x_1)) - x_1 + x_2 = -H(x_1) > 0$$

$$H(x_1) \cdot H(x_2) < 0 (*)$$

Απ'το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2): H(x_0) = 0$

$H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$ άρα η H γν.αύξουσα στο (x_1, x_2) και το x_0 μοναδικό

$$(*) x_1 < x < 1 \xrightarrow{f \nearrow} f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$1 < x < x_2 \xrightarrow{f \searrow} f(x) > f(x_2) = 0$$

Η $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, x_2]$

$G'(x) = f(x) \geq 0$ άρα G γν.αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{G \nearrow} G(x_1) < G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1) < 0$$