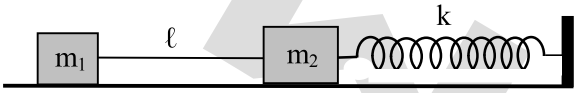
ΑΣΚΗΣΗ

Σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 3Kg$ είναι δεμένο μέσω οριζόντιου αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους ℓ, σε σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 1Kg$ το οποίο είναι στερεωμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Εκτρέπουμε το σώμα $Σ_1$ με τρόπο που το νήμα τεντώνεται παρασύροντας το σώμα $Σ_2$ και το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $Δ\ell = 20cm$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Αν θεωρήσουμε θετική την αρχική κατεύθυνση εκτροπής:

1. Να αποδείξετε πως το σύστημα των δύο σωμάτων αρχίζει να κινείται εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε τη σταθερά ταλάντωσης για το σύστημα και για κάθε σώμα χωριστά.

2. Να βρείτε την δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα $Σ_1$ σε συνάρτηση με το χρόνο και να την παραστήσετε γραφικά.

3. Να βρείτε και να παραστήσετε σε συνάρτηση με το χρόνο την ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ από την $t = 0$ μέχρι την στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του για πρώτη φορά.

4. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος $Σ_1$ και να εξηγήσετε γιατί θα συγκρουστεί με το σώμα $Σ_2$.

5. Έστω ότι τα $Σ_1$, $Σ_2$ συγκρούονται την στιγμή που το $Σ_2$ περνά για δεύτερη φορά από τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Να υπολογίσετε το μήκος ℓ του νήματος.

6. Αν η κρούση είναι πλαστική να βρείτε:

α. Την εξίσωση κίνησης του συσσωματώματος που προκύπτει.

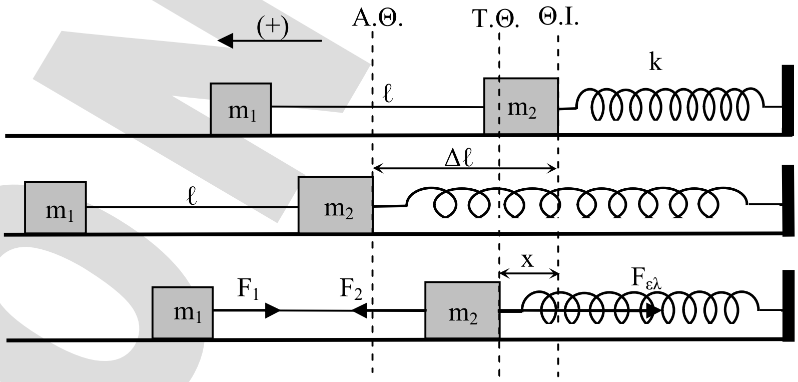
β. Το ποσοστό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

7. Αν η κρούση είναι ελαστική να εξετάσετε αν το νήμα θα τεντωθεί ξανά μέχρι να ξανασυγκρουστούν τα δύο σώματα.

ΛΥΣΗ

1. Σε τυχαία θέση με το ελατήριο τεντωμένο κατά x, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι:

Στην κατακόρυφη διεύθυνση το βάρος και η κάθετη αντίδραση που δέχεται από το οριζόντιο επίπεδο κάθε σώμα, δυνάμεις αντίθετες οπότε $ΣF_y = 0$. Στην οριζόντια διεύθυνση η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$ που ασκείται στο $Σ_2$ και οι τάσεις του νήματος F_1 και F_2 που ασκούνται στα $Σ_1$, $Σ_2$ αντίστοιχα. Αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει $F_2 = F_1$ κατά μέτρο.



Για τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σύστημα, θεωρώντας θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση εκτροπής του, ισχύει: $ΣF = F_2 - F_1 - F_{ελ} \Rightarrow ΣF = -F_{ελ} = -kx$.

Άρα $ΣF = -Dx$, δηλαδή το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k = 400N/m$.

Αφού το νήμα είναι μη εκτατό τα $Σ_1$, $Σ_2$ ταλαντώνονται με τη γωνιακή συχνότητα ω του συστήματος.

Για το σύστημα ισχύει $k = (m_1+m_2)ω^2$, για το σώμα $Σ_1$ ισχύει $D_1 = m_1ω^2$ και για το σώμα $Σ_2$ ισχύει $D_2 = m_2ω^2$.

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις προκύπτει: $D_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}k \Rightarrow D_1 = 300N/m$ και $D_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}k \Rightarrow D_2 = 100N/m$.

2. Το σύστημα ταλαντώνεται με $A = Δ\ell = 0{,}2m$, $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow ω = 10rad/s$, $T = \frac{2π}{ω} \Rightarrow T = \frac{π}{5}s$. Για $t = 0$, $x = A \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot ημφ_0 = A \Rightarrow ημφ_0 = 1 \Rightarrow φ_0 = \frac{π}{2}$. Η εξίσωση απομάκρυνσης του συστήματος είναι $x = 0{,}2 \cdot ημ(10t+\frac{π}{2})$ (S.I.).

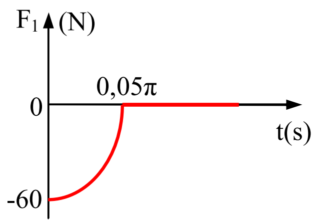
Το σώμα $Σ_1$ εκτελεί αρμονική ταλάντωση με την ίδια εξίσωση απομάκρυνσης γύρω από τη θέση ισορροπίας του.

Για το $Σ_1$ ισχύει $ΣF = -D_1x \Rightarrow F_1 = -300x \Rightarrow F_1 = -60 \cdot ημ(10t+\frac{π}{2})$ (S.I.).

Όμως το νήμα ασκεί δύναμη μόνο στην κατεύθυνση που τεντώνεται, δηλαδή $F_1 \le 0 \Rightarrow -300x \le 0 \Rightarrow x \ge 0$, άρα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{4} = 0{,}05π$ s που το σώμα $Σ_1$ φτάνει στη θέση ισορροπίας του.

Μετά το νήμα χαλαρώνει, η δύναμη που ασκεί μηδενίζεται και το σώμα $Σ_1$ συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Οπότε:

$$F_1 = \begin{cases} -60 \cdot ημ(10t+\frac{π}{2}) & \text{για } 0 \le t \le 0{,}05π \text{ s} \\ 0 & \text{για } t \ge 0{,}05π \text{ s} \end{cases} \quad \text{(S.I.)}$$



και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

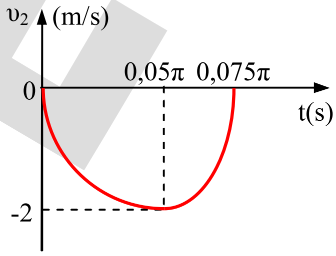
3. Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί ταλάντωση με απομάκρυνση ίδια με την απομάκρυνση του συστήματος, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}05π$ s, που η τάση του νήματος μηδενίζεται. Στη συνέχεια στο $Σ_2$ ασκείται μόνο η δύναμη από το ελατήριο οπότε κάνει νέα ταλάντωση με σταθερά $D' = k = 400N/m$ και $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega' = 20rad/s$. Η νέα ταλάντωση αρχίζει όταν το Σ_2 είναι στη θέση ισορροπίας του και η ταχύτητα $\upsilon_{max} = \omega \cdot A = 2m/s$ που είχε αποκτήσει, θα είναι μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης. Οπότε το πλάτος της νέας ταλάντωσης είναι: $A' = \frac{\upsilon_{max}}{\omega'} \Rightarrow A' = 0{,}1m$.

Επειδή τη στιγμή $t_1 = 0{,}05\pi$ s το σώμα Σ_2 είναι στη θέση ισορροπίας του με $\upsilon < 0$ η νέα ταλάντωση έχει $\varphi_0 = \pi$, άρα η εξίσωση της κίνησής του για $t \geq 0{,}05\pi$ s είναι $x = 0{,}1 \cdot ημ[20(t-0{,}05\pi)+\pi] \Rightarrow x = 0{,}1 \cdot ημ20t$ (S.I.).

Οπότε η εξίσωση κίνησης του Σ_2 είναι: $x_2 = \begin{cases} 0{,}2 \cdot ημ(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ για } 0 \leq t < 0{,}05\pi \text{ s} \\ 0{,}1 \cdot ημ20t \quad \text{ για } t \geq 0{,}05\pi \text{ s} \end{cases}$ (S.I.)

και η εξίσωση της ταχύτητάς του είναι:

$\upsilon_2 = \begin{cases} 2 \cdot συν(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ για } 0 \leq t < 0{,}05\pi \text{ s} \\ 2 \cdot συν20t \quad \text{ για } t \geq 0{,}05\pi \text{ s} \end{cases}$ (S.I.)



Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 μηδενίζεται όταν $2 \cdot συν20t = 0 \Rightarrow 20t = k\pi + \frac{\pi}{2}$,
όπου για $k = 0$, παίρνουμε $t = 0{,}025\pi$ s $< t_1 = 0{,}05\pi$ s που απορρίπτεται και για $k = 1$ παίρνουμε $t = 0{,}075\pi$ s για πρώτη φορά.
Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

4. Το σώμα Σ_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 που το νήμα θα χαλαρώσει, εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας $x = 0$ τη θέση ισορροπίας του συστήματος, η οποία ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, η θέση του σώματος Σ_1 περιγράφεται από τη σχέση $x_1 = \ell + 0{,}2 \cdot ημ(10t + \frac{\pi}{2})$ (S.I.) για $0 \leq t < 0{,}05\pi$s. Στη συνέχεια, αφού δεν του ασκείται δύναμη κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = -2m/s$, αυτήν που είχε αποκτήσει τη στιγμή t_1, στη θέση όπου το νήμα χαλάρωσε. Οπότε $x_1 = \ell - 2 \cdot (t - 0{,}05\pi)$ (S.I.) για $t \geq 0{,}05\pi$s.
Αφού το σώμα Σ_2 για $t \geq 0{,}05\pi$s επιβραδύνεται και στη συνέχεια επιταχύνεται επιστρέφοντας στη θέση ισορροπίας του $x = 0$, κάποια στιγμή θα συγκρουστεί με το σώμα Σ_1.

5. Η σύγκρουση γίνεται όταν το σώμα Σ_2 διέρχεται για δεύτερη φορά από τη θέση ισορροπίας του $x = 0$.
Από την εξίσωση κίνησής του, προκύπτει: $0{,}1 \cdot ημ20t = 0 \Rightarrow 20t = 2\pi \Rightarrow t = 0{,}1\pi$s.
Άρα από την εξίσωση κίνησης του Σ_1 για $t = 0{,}1\pi$s και $x_1 = 0$ παίρνουμε: $\ell - 2(0{,}1\pi - 0{,}05\pi) = 0 \Rightarrow \ell = 0{,}1\pi$m.

6. **α.** Η κρούση γίνεται στη θέση $x = 0$ με το σώμα Σ_1 να κινείται στην αρνητική κατεύθυνση και το σώμα Σ_2 στη θετική κατεύθυνση με ταχύτητες ίσου μέτρου $\upsilon = 2m/s$. Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. κατά την κρούση έχουμε:
$p_{πριν} = p_{μετά} \Rightarrow -m_1\upsilon + m_2\upsilon = (m_1+m_2) \cdot v_\Sigma \Rightarrow v_\Sigma = -1m/s$.
Για την ταλάντωση που ακολουθεί ισχύει $\omega_\Sigma = \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \omega = 10rad/s$. Η κρούση γίνεται στη Θ.Ι. οπότε:
$|v_\Sigma| = \upsilon_{\Sigma,max} \Rightarrow A_\Sigma = \frac{|v_\Sigma|}{\omega_\Sigma} \Rightarrow A_\Sigma = 0{,}1m$. Άρα για $t \geq 0{,}1\pi$s ισχύει: $x_\Sigma = 0{,}1 \cdot ημ[10(t-0{,}1\pi)+\varphi_0]$.
Αφού για $t = 0{,}1\pi$s, $x_\Sigma = 0$ και $\upsilon_\Sigma < 0$ προκύπτει: $0{,}1 \cdot ημ\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pi$. Η εξίσωση απομάκρυνσης του συσσωματώματος είναι: $x_\Sigma = 0{,}1 \cdot ημ[10(t-0{,}1\pi)+\pi] \Rightarrow x_\Sigma = 0{,}1 \cdot ημ(10t)$ (S.I.) για $t \geq 0{,}1\pi$s.
β. Κατά την κρούση θα μεταβληθεί μόνο η κινητική ενέργεια του συστήματος, οπότε:

$$\Pi\% = \frac{K_{μετά} - K_{πριν}}{K_{πριν}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\Sigma^2 - \left(\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2\right)}{\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2} 100\% \Rightarrow \Pi\% = -75\%.$$

7. Κατά την ελαστική κρούση διατηρείται η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος. Δηλαδή:
$-m_1\upsilon + m_2\upsilon = m_1v_1 + m_2v_2$ και $\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$. Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει:
$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(-\upsilon) + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon \Rightarrow v_1 = 0$ και $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(-\upsilon) + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon \Rightarrow v_2 = -4m/s$. Άρα αμέσως μετά την ελαστική κρούση το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται και το σώμα Σ_2 που είναι δεμένο στην άκρη του ελατηρίου θα κάνει ταλάντωση με πλάτος $A_3 = \frac{|v_2|}{\omega'} \Rightarrow A_3 = 0{,}2m$.
Επειδή $A_3 < \ell$, συμπεραίνουμε ότι το νήμα δεν τεντώνεται ξανά μέχρι την στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του Σ_2.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ • ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ
ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ
ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ