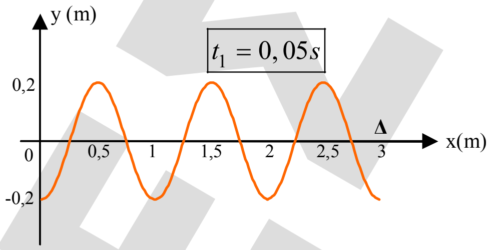
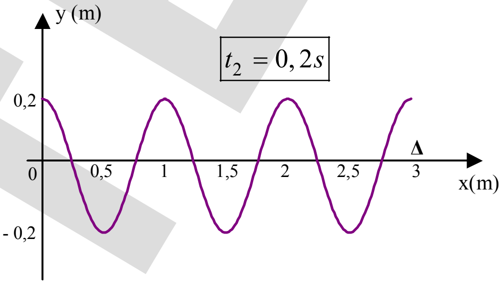
ΑΣΚΗΣΗ

Σε μια ομογενή ελαστική χορδή μεγάλου μήκους που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x΄Οx, έχει δημιουργηθεί εγκάρσιο στάσιμο κύμα από τη συμβολή δύο όμοιων αρμονικών κυμάτων ίδιου πλάτους, ίδιας συχνότητας, που διαδίδονται στη χορδή σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Στα σχήματα φαίνεται τμήμα των στιγμιότυπων του στάσιμου κύματος, μεταξύ του σημείου Ο(x = 0) και του σημείου Δ($x_Δ$ = 3m) της χορδής, δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 = 0,05s και t_2 = 0,2s αντίστοιχα, μετά την αποκατάσταση του στάσιμου κύματος. Τις παραπάνω χρονικές στιγμές t_1 και t_2 τα μόρια του μέσου που ταλαντώνονται έχουν την μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσής τους. Από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2, το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή μέτρησης των αποστάσεων Ο(x = 0) έχει διέλθει τρεις φορές από τη θέση ισορροπίας του.





Α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δύο αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή.

Β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

Γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ(x_M = 1,5m), κατά τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Δ($x_Δ$ = 3m) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου Β της χορδής, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d = \frac{1}{8}$m αριστερά από το σημείο Δ, τη χρονική στιγμή που το σημείο Δ έχει $y_Δ$ = 0,1m και $υ_Δ > 0$. Δίνεται η στοιχειώδης μάζα του σημείου Β, dm = 2,5mg και $π^2 = 10$.

Ε. Το σημείο Λ είναι το 3° κατά σειρά σημείο της χορδής στο θετικό ημιάξονα, που είναι δεσμός. Να υπολογίσετε σε τι ποσοστό % πρέπει να μεταβάλλουμε τη συχνότητα διέγερσης της χορδής, ώστε το σημείο Λ να γίνει η $5^η$ κατά σειρά κοιλία της χορδής στο θετικό ημιάξονα και το σημείο Ο να συνεχίσει να είναι κοιλία.

Ζ. Για την αρχική συχνότητα διέγερσης να υπολογίσετε τις θέσεις των σημείων της χορδής μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου Λ, τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος 0,1m.

ΛΥΣΗ

Α. Με βάση την εκφώνηση, αφού τις στιγμές t_1 και t_2 τα μόρια του μέσου που ταλαντώνονται έχουν την μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσής τους, συμπεραίνουμε ότι όλα βρίσκονται στην ακραία τους θέση.

Άρα από τα στιγμιότυπα φαίνεται ότι 2Α = 0,2 m $\Rightarrow$ Α = 0,1m.

Στο χρονικό διάστημα $Δt = t_2 - t_1 \Rightarrow Δt = 0{,}15s$ η κοιλία στη θέση Ο(x = 0) έχει διέλθει τρεις φορές από τη θέση ισορροπίας της, ξεκινώντας από τη θέση y = -2A και καταλήγοντας στη θέση y = +2A. Άρα $Δt = \frac{3T}{2} \Rightarrow T = 0{,}1s$.

Οπότε $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10Hz$ και $ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow ω = 20π\ rad/s$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι το μήκος κύματος είναι λ = 1m.

Η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι $υ = λ \cdot f \Rightarrow υ = 10m/s$.

Β. Από το πρώτο στιγμιότυπο, φαίνεται ότι το σημείο Ο(x = 0) τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{2} = 0{,}05s$, έχει απομάκρυνση y = -2A = -0,2m. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι πριν από χρόνο $Δt_1 = \frac{T}{2} = 0{,}05s$, άρα τη στιγμή t = 0, είχε απομάκρυνση y = +2A = +0,2m, δηλαδή δεν βρισκόταν στη θέση ισορροπίας του. Δεδομένου ότι το σημείο Ο είναι κοιλία συμπεραίνουμε ότι συμβάλλοντα αρμονικά κύματα που δημιούργησαν το στάσιμο είχαν κοινή αρχική φάση $φ_ο$.

Οι εξισώσεις των δύο αρμονικών κυμάτων είναι:

$$y_1 = A \cdot ημ\left[2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right] \quad \text{και} \quad y_2 = A \cdot ημ\left[2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right]$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας προκύπτει η εξίσωση του στάσιμου κύματος, δηλαδή:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot ημ\left[2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right] + A \cdot ημ\left[2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2A \cdot συν\frac{\left[2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right] - \left[2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right]}{2} \cdot ημ\frac{\left[2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right] + \left[2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) + φ_ο\right]}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \dfrac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\left(2\pi \dfrac{t}{T} + \varphi_o\right)$

η οποία για A = 0,1m, λ = 1m και T = 0,1s, γίνεται: $y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu(20\pi t + \varphi_o)$ (S.I.)

Θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση όπου x = 0, $t = t_1 = 0,05$s και y = -0,2m παίρνουμε:

$\eta\mu(\pi + \varphi_o) = -1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 \Rightarrow \varphi_o = \dfrac{\pi}{2}$.

Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος γίνεται: $y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

Γ. Οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων Μ ($x_M = 1,5$m) και Δ($x_\Delta = 3$m) είναι:

$y_M = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x_M \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_M = -0,2 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (S.I.) και $\upsilon_M = -4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

$y_\Delta = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x_\Delta \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_\Delta = 0,2 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (S.I.) και $\upsilon_\Delta = 4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

Παρατηρούμε ότι κάθε χρονική στιγμή ισχύει $\upsilon_M = -\upsilon_\Delta$, άρα όταν το σημείο Δ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα $\upsilon_\Delta = 4\pi$ m/s, έχουμε $\upsilon_M = -4\pi$ m/s.

Δ. Το σημείο Β βρίσκεται στη θέση $x_B = x_\Delta - d \Rightarrow x_B = \dfrac{23}{8}$m και έχει πλάτος $|A'_B| = 0,2 \cdot |\sigma\upsilon\nu 2\pi x_B| \Rightarrow |A'_B| = 0,1\sqrt{2}$m.

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι: $\dfrac{dK_B}{dt} = \dfrac{dW_{\Sigma F}}{dt} \Rightarrow \dfrac{dK_B}{dt} = -\Sigma F_B \cdot \upsilon_B \Rightarrow \dfrac{dK_B}{dt} = -dm \cdot \omega^2 \cdot y_B \cdot \upsilon_B$.

Όταν $y_\Delta = 0,1\text{m} \Rightarrow 0,2 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0,1 \Rightarrow \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Τότε $y_B = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x_B \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_B = 0,05\sqrt{2}$m.

Από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Β, υπολογίζουμε την ταχύτητά του όταν: $y_B = 0,05\sqrt{2}$m.

$E = K + U \Rightarrow \dfrac{1}{2}dm \cdot \omega^2 \left(A'_B\right)^2 = \dfrac{1}{2}dm \cdot \upsilon_B^2 + \dfrac{1}{2}dm \cdot \omega^2 y_B^2 \Rightarrow \upsilon_B = \pm\omega\sqrt{\left(A'_B\right)^2 - y_B^2} \Rightarrow \upsilon_B = \pm\pi\sqrt{6}$m/s.

Τα σημεία Β και Δ έχουν την ίδια φάση αφού το Δ είναι κοιλία και το Β απέχει απόσταση $d = \dfrac{1}{8}\text{m} < \dfrac{\lambda}{4}$ από το Δ.

Δηλαδή όταν $\upsilon_\Delta > 0$ τότε και $\upsilon_B > 0$. Οπότε $\upsilon_B = +\pi\sqrt{6}$m/s.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σημείου Β είναι: $\dfrac{dK_B}{dt} = -\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ J/s.

Ε. Αφού στη θέση x = 0 (σημείο Ο), το στάσιμο κύμα έχει κοιλία συμπεραίνουμε ότι το σημείο Λ (τρίτος δεσμός), βρίσκεται στη θέση $x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4} \xrightarrow[x=x_\Lambda]{k=2} x_\Lambda = 1,25$m.

Αφού μετά τη μεταβολή της συχνότητας το σημείο Ο εξακολουθεί να είναι κοιλία, η θέση της 5ης κοιλίας (σημείο Λ) είναι $x = k\dfrac{\lambda'}{2} \xrightarrow[x=x_\Lambda]{k=4} x_\Lambda = 2\lambda' \Rightarrow \lambda' = 0,625$m.

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων παραμένει σταθερή (ίδια χορδή), οπότε η νέα συχνότητα f΄ είναι:

$f' = \dfrac{\upsilon}{\lambda'} \Rightarrow f' = 16$Hz.

Το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας είναι $\Pi\% = \dfrac{f' - f}{f}100\% \Rightarrow \Pi\% = 60\%$.

Ζ. Το πλάτος ταλάντωσης όλων των σημείων της χορδής είναι: $|A'| = 0,2 \cdot |\sigma\upsilon\nu 2\pi x|$ (S.I.)

Για τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται με πλάτος 0,1m ισχύει**:**

$|A'| = 0,1 \Rightarrow 0,2 \cdot |\sigma\upsilon\nu 2\pi x| = 0,1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\pi x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = \left(\dfrac{k}{2} \pm \dfrac{1}{6}\right)$m με $k \in \mathbb{Z}$.

Γνωρίζοντας ότι $x_O < x < x_\Lambda \Rightarrow 0 < x < 1,25$m παίρνουμε: $x_1 = \dfrac{1}{6}$m, $x_2 = \dfrac{2}{6}$m, $x_3 = \dfrac{4}{6}$m, $x_4 = \dfrac{5}{6}$m, $x_5 = \dfrac{7}{6}$m.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ • ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ
ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ
ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ