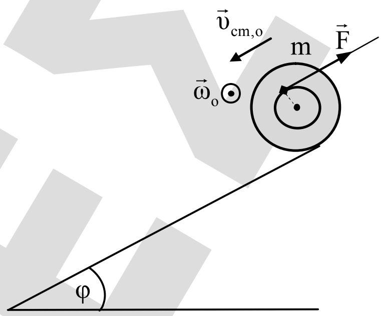
ΑΣΚΗΣΗ



Το κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος, γωνίας κλίσης $φ = 30^o$, έχει μήκος $S = 50$ m. Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας $m = 3$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m διέρχεται κατερχόμενος τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ από το ανώτερο σημείο του κεκλιμένου επίπεδου, με ταχύτητα $υ_{cm,o} = 20$ m/s και γωνιακή ταχύτητα $ω_o = 50$ rad/s κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω.

Τη στιγμή $t_o = 0$ ασκούμε μέσω νήματος στον κύλινδρο σταθερή δύναμη F κατάλληλου μέτρου με διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τα πάνω, τέτοια ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει επιβραδυνόμενος ομαλά. Ο φορέας της δύναμης F απέχει απόσταση $d = 0{,}2$ m από το κέντρο του κυλίνδρου. Αν ο κύλινδρος ακινητοποιείται στιγμιαία στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και το χρόνο μετάβασης του στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

β. Το έργο της δύναμης F για την παραπάνω διαδρομή.

γ. Το μέτρο της δύναμης F.

δ. Για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και κεκλιμένου επιπέδου, ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο και επαναλάβουμε το παραπάνω πείραμα, να υπολογίσετε:

ε. Για ποια τιμή της δύναμης F ο κύλινδρος μηδενίζει την ταχύτητα του κέντρου μάζας του στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;

ζ. Το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του κυλίνδρου.

η. Το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

θ. Το έργο της δύναμης F για την παραπάνω διαδρομή.

ι. Το πλήθος των περιστροφών του κυλίνδρου για την παραπάνω διαδρομή.

κ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται στιγμιαία η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.

Να θεωρήσετε ότι ο άξονας περιστροφής του κυλίνδρου είναι διαρκώς κάθετος στο νήμα και μετακινείται παράλληλα στον εαυτό του. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s^2 και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$.

ΛΥΣΗ

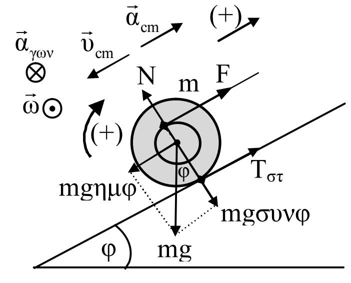
α. Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισχύουν οι εξισώσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης, δηλαδή: $Δx = υ_{cm,o}Δt - \frac{1}{2}α_{cm}Δt^2$ και $υ_{cm} = υ_{cm,o} - α_{cm}Δt$

Θέτουμε $Δx = S = 50$ m και $υ_{cm} = 0$ οπότε από την επίλυση του συστήματος προκύπτει $α_{cm} = 4$ m/s^2 και $Δt = 5$ s.

β. Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις βάρος (mg), η δύναμη μέσω του νήματος (F), κάθετη αντίδραση του επιπέδου (N) και η στατική τριβή ($T_{στ}$) η οποία δεν έχει προφανή ρόλο για αυτό και τοποθετείται τυχαία με φορά προς τα πάνω. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου από την ανώτερη θέση έως τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, (όπου και ακινητοποιείται στιγμιαία), γνωρίζοντας ότι το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν, οπότε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow -\left(\frac{1}{2}mυ_{cm,o}^2 + \frac{1}{2}Iω_o^2\right) = W_F + W_W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2}mυ_{cm,o}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2ω_o^2\right) = W_F + mg \cdot ημφ \cdot S \Rightarrow W_F = -1650 \text{ J}.$$



γ. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική (επιβραδυνόμενη) κίνηση του κυλίνδρου θεωρώντας θετική την κατεύθυνση της $α_{cm}$, έχουμε:

$$ΣF_x = mα_{cm} \Rightarrow F + T_{στ} - mg \cdot ημφ = mα_{cm} \text{ ①}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την περιστροφική (επιβραδυνόμενη) κίνηση του κυλίνδρου θεωρώντας θετική την κατεύθυνση της $α_{γων}$, έχουμε:

$$Στ = I \cdot α_{γων} \Rightarrow F \cdot d - T_{στ} \cdot R = \frac{1}{2}mR^2α_{γων} \xrightarrow[α_{cm} = R \cdot α_{γων}]{d = R/2} \frac{F}{2} - T_{στ} = \frac{1}{2}mα_{cm} \text{ ②}$$

Από τις σχέσεις ① και ② έχουμε: $\frac{3F}{2} - mg \cdot ημφ = \frac{3}{2}mα_{cm} \Rightarrow F = 22$ N.

δ. Από τη σχέση ② έχουμε: $T_{στ} = \frac{F}{2} - \frac{1}{2}mα_{cm} \Rightarrow T_{στ} = 5$ N.

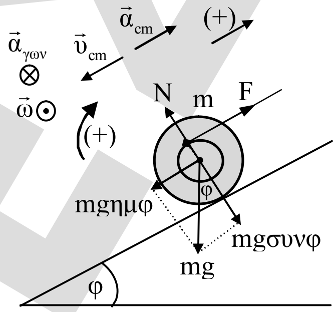
Για τον κύλινδρο ισχύει: $ΣF_y = 0 \Rightarrow N = mg \cdot συνφ \Rightarrow N = 15\sqrt{3}$ N.

Για να κυλίεται ο κύλινδρος χωρίς να ολισθαίνει, πρέπει η τριβή που αναπτύσσεται να είναι στατική, με τιμή μικρότερη ή ίση από την οριακή στατική τριβή $T_{ορ} = μ_σ \cdot N$. Δηλαδή πρέπει:

$$T_{στ} \le μ_σ \cdot N \Rightarrow μ_σ \ge \frac{T_{στ}}{N} \Rightarrow μ_σ \ge \frac{\sqrt{3}}{9} .$$

ε. Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, τότε δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ κυλίνδρου και κεκλιμένου επιπέδου. Οπότε ο κύλινδρος είναι πιθανόν να εκτελέσει κύλιση με ολίσθηση.

Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης, δηλαδή:



$$Δx = υ_{cm,o}Δt - \frac{1}{2}α_{cm}Δt^2 \quad \text{και} \quad υ_{cm} = υ_{cm,o} - α_{cm}Δt$$

Οπότε για το ίδιο $Δx = S = 50$ m και $υ_{cm} = 0$ προκύπτει ίδιο $α_{cm} = 4$ m/s^2 και $Δt = 5$ s.

Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις βάρος (mg), η δύναμη μέσω του νήματος (F), και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου (N).

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική επιβραδυνόμενη κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$ΣF_x = mα_{cm} \Rightarrow F - mg \cdot ημφ = mα_{cm} \Rightarrow F = 27 \text{ N} .$$

ζ. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την περιστροφική επιβραδυνόμενη κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$Στ = I \cdot α_{γων} \Rightarrow F \cdot d = \frac{1}{2}mR^2α_{γων} \xrightarrow{d=R/2} F = mRα_{γων} \Rightarrow α_{γων} = \frac{F}{mR} \Rightarrow α_{γων} = 22,5 \text{ rad/s}^2 .$$

η. Τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχει γωνιακή ταχύτητα:

$ω = ω_o - α_{γων}Δt \Rightarrow ω = -62,5$ rad/s. Το «μείον» σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική γωνιακή του ταχύτητα $ω_o$.

Για το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου ισχύει:

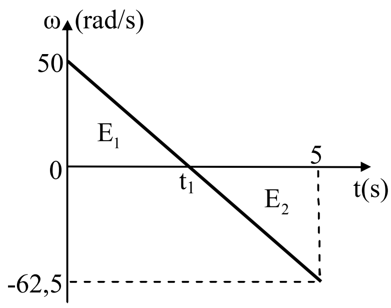
$$\left|\vec{L}\right| = \left|I \cdot ω\right| \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = \left|\frac{1}{2}mR^2 \cdot ω\right| \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = 15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} .$$

θ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου από την ανώτερη θέση έως τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, οπότε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow \frac{1}{2}Iω^2 - \left(\frac{1}{2}mυ_{cm,o}^2 + \frac{1}{2}Iω_o^2\right) = W_F + W_W \Rightarrow \frac{1}{4}mR^2ω^2 - \left(\frac{1}{2}mυ_{cm,o}^2 + \frac{1}{4}mR^2ω_o^2\right) = W_F + mg \cdot ημφ \cdot S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = -1181,25 \text{ J} .$$

ι. Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου έως τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου ακολουθεί τη μεταβολή του διπλανού διαγράμματος και μηδενίζεται στιγμιαία τη χρονική στιγμή t_1 όπου:



$$ω = 0 \Rightarrow ω_o - α_{γων}t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{20}{9} \text{ s} .$$

Από τα εμβαδά του διαγράμματος προκύπτουν οι γωνιακές μετατοπίσεις του κυλίνδρου. Δηλαδή $Δθ_1 = E_1 = \frac{500}{9}$ rad και $Δθ_2 = E_2 = -\frac{781,25}{9}$ rad.

Για το πλήθος N των περιστροφών του κυλίνδρου ισχύει:

$$N = N_1 + N_2 \Rightarrow N = \frac{|Δθ_1|}{2π} + \frac{|Δθ_2|}{2π} \Rightarrow N = \frac{1281,25}{18π} \text{ περιστροφές.}$$

κ. Τη χρονική στιγμή t_1 ο κύλινδρος έχει $ω = 0$ και ταχύτητα $υ_{cm} = υ_{cm,o} - α_{cm}t_1 \Rightarrow υ_{cm} = \frac{100}{9}$ m/s.

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου λόγω στροφικής κίνησης ισχύει:

$$\frac{dK_{στροφ}}{dt} = \frac{dW_{Στ}}{dt} = \frac{Στ \cdot dθ}{dt} = Στ \cdot ω \xrightarrow{ω=0} \frac{dK_{στροφ}}{dt} = 0 \text{ J/s} .$$

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου λόγω μεταφορικής κίνησης ισχύει:

$$\frac{dK_{μετ}}{dt} = \frac{dW_{ΣF}}{dt} = \frac{ΣF \cdot dx}{dt} = ΣF \cdot υ_{cm} = (mg \cdot ημφ - F) \cdot υ_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{μετ}}{dt} = -\frac{400}{3} \text{ J/s.}$$

Οπότε για το ρυθμό μεταβολής της συνολικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{μετ}}{dt} + \frac{dK_{στροφ}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{400}{3} \text{ J/s} .$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ • ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ
ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ
ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ