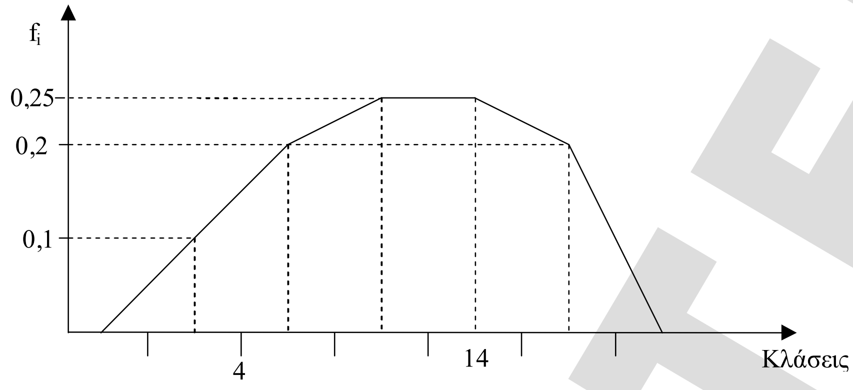
Άσκηση 1

Το παρακάτω πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στις τιμές μιας μεταβλητής X που έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.



α. Να συμπληρώσετε το παραπάνω σχήμα με το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
β. Να βρείτε τη διάμεσο.
γ. Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.
δ. Έστω A, B, $Y \neq \varnothing$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \cup Y = B$ και $P(A) < P(B)$. Οι πιθανότητες $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ ανήκουν στο σύνολο $\Sigma = \{f_1, f_2, f_3\}$ και $P(A)$=0,2. Να βρείτε:

i) την πιθανότητα $P(B - A)$,

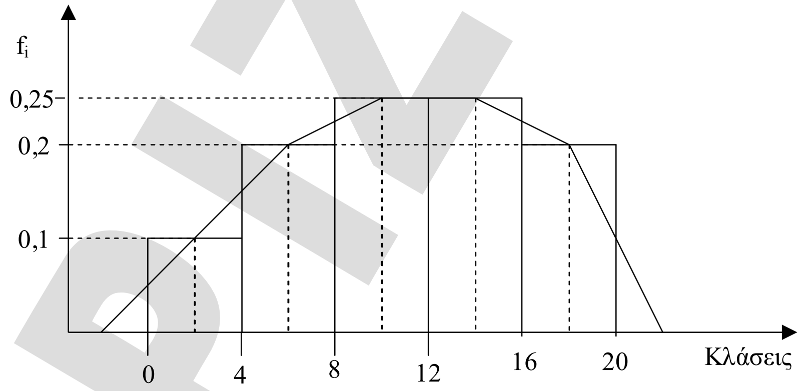
ii) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πιθανότητας $P(Y)$.

Λύση

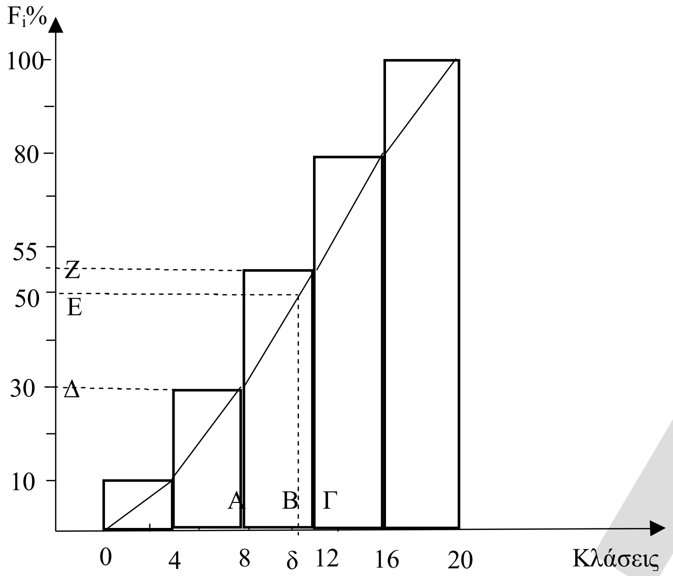
α. Έστω α το άκρο της $1^{ης}$ κλάσης και c το πλάτος κάθε κλάσης. Τότε οι κλάσεις είναι $[\alpha, \alpha + c), [\alpha + c, \alpha + 2c), [\alpha + 2c, \alpha + 3c), [\alpha + 3c, \alpha + 4c), [\alpha + 4c, \alpha + 5c)$. Επομένως προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + c = 4 \\ \dfrac{2\alpha + 7c}{2} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Άρα οι κλάσεις είναι: [0,4), [4,8), [8,12), [12,16), [16,20) και το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων είναι:



β. Έχουμε ότι $f_1 = 0,1, f_2 = f_5 = 0,2$ και $f_3 = f_4 = 0,25$. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % είναι:



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta Z}\Leftrightarrow\frac{\delta-8}{4}=\frac{20}{25}\Leftrightarrow 25\delta-200=80\Leftrightarrow\delta=\frac{56}{5}\Leftrightarrow\delta=11,2$.

γ. Η μέση τιμή είναι $\overline{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i f_i=x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+x_5f_5=2\cdot 0,1+6\cdot 0,2+10\cdot 0,25+14\cdot 0,25+18\cdot 0,2=11$

και η διακύμανση:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{5}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}=\sum_{i=1}^{5}x_i^2f_i-(\overline{x})^2==4\cdot 0,1+36\cdot 0,2+100\cdot 0,25+196\cdot 0,25+324\cdot 0,2-121=25,4,$$

οπότε $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{25,4}$ και $CV=\frac{s}{|\overline{x}|}=\frac{\sqrt{25,4}}{11}\simeq 0,45>0,1$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

δ. i) Έχουμε $A\cup Y=B$, οπότε $A\subseteq B$ και $A\cap B=A$, $A\cup B=B$. Άρα $P(A\cap B)=P(A)=0,2$ και $P(A\cup B)=P(B)$. Επειδή $P(A\cap B), P(A\cup B)\in\Sigma$ και $P(A)<P(B)$ ισχύει ότι $P(A\cup B)=P(B)=0,25$. Άρα $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0,05$.

ii) Είναι $A\cup Y=B$, οπότε $Y\subseteq B$, άρα $P(Y)\leq P(B)\Leftrightarrow P(Y)\leq 0,25$ και όσα στοιχεία του B δεν ανήκουν στο A, θα πρέπει να ανήκουν στο Y, άρα $B-A\subseteq Y$, επομένως $P(B-A)\leq P(Y)\Leftrightarrow 0,05\leq P(Y)$. Συνεπώς $0,05\leq P(Y)\leq 0,25$. Άρα η μέγιστη τιμή της P(Y) είναι 0,25 όταν $Y=B$ και η ελάχιστη τιμή 0,05 όταν $Y=B-A$

Άσκηση 2

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to(0,2]$ και ενδεχόμενο $A=\{\omega_1,\omega_2,..,\omega_\nu\}$ ενός δειγματικού χώρου Ω. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο A(1, 2) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της $g(x)=\ln^2 f(x)+2x^2,\ x\in R$ στο $B(1,g(1))$.

β. Να βρείτε το πλήθος $\nu\in N^*$ των σημείων $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),...,(x_\nu,f(x_\nu))$ με διασπορά των τεταγμένων $s_z^2=3,5$ και $\sum_{i=1}^{\nu}f^2(x_i)=23$.

γ. Για ν = 6, η μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων των σημείων της εφαπτομένης ε με τετμημένες $P(\omega_i)$, $i = 1,...,6$ είναι $\ln^2 2 - \frac{5}{3}$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.

δ. Για $P(A) = \frac{1}{2}$ έστω ενδεχόμενο $\Gamma = \left\{\omega_i \in \Omega \,/\, i^2 - 3i + \frac{9}{4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)+\sqrt{x+4}-4}{x}\right\}$ με $P(A-\Gamma) = \frac{1}{3}$.

Να βρεθεί το $P(\Gamma)$.

Λύση

α. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A(1, 2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = 0$ και $f(1) = 2$.

Επίσης g(x) παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = 2\ln f(x)(\ln f(x))' + 4x = \frac{2\ln f(x) f'(x)}{f(x)} + 4x,\ x \in R$.

$g(1) = \ln^2 f(1) + 2\cdot 1^2 = \ln^2 2 + 2$ και $g'(1) = \frac{2\ln f(1) f'(1)}{f(1)} + 4\cdot 1 = 4$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής

(ε): $y = \lambda_1 x + \beta$ με $\lambda_1 = g'(1) = 4$ και $B \in (\varepsilon)$. Άρα $\ln^2 2 + 2 = 4\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \ln^2 2 - 2$. Οπότε (ε): $y = 4x - 2 + \ln^2 2$.

β. Ισχύει ότι: $0 < f(x) \le 2$ για κάθε $x \in R$. Άρα $f(x_1) \le 2, ..., f(x_\nu) \le 2$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$0 < f(x_1) + ... + f(x_\nu) \le 2\cdot\nu \Leftrightarrow 0 < \frac{f(x_1)+....+f(x_\nu)}{\nu} \le 2 \Leftrightarrow 0 < \bar{z} \le 2 \Leftrightarrow 0 < (\bar{z})^2 \le 4$, όπου z η μέση τιμή.

Ισχύει ότι: $s_z^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} f^2(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} f(x_i)\right)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow s_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} f^2(x_i)}{\nu} - \bar{z}^2$. Άρα $\bar{z}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} f^2(x_i) - s_z^2 = \frac{23}{\nu} - 3,5$. Επομένως

$0 < \frac{23}{\nu} - 3,5 \le 4 \Leftrightarrow \nu \ge 3,06$ και $\nu < 6,5$ **(1)**. Επίσης $0 < f(x_i) \le 2 \Leftrightarrow 0 < f^2(x_i) \le 4$, $i = 1,...,\nu$ δηλαδή

$\sum_{i=1}^{\nu} f^2(x_i) \le 4\nu \Leftrightarrow 23 \le 4\nu \Leftrightarrow \nu \ge 5,75$ **(2)**

Άρα από **(1)**, **(2)** το ζητούμενο ν = 6.

γ. Για ν = 6 το ενδεχόμενο Α είναι: $A = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$ και $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_6)$. Για $x_i = P(\omega_i)$, έχουμε $y_i = 4x_i - 2 + \ln^2 2,\ \ i = 1,...,6$.

Άρα $\bar{y} = 4\bar{x} - 2 + \ln^2 2 \Leftrightarrow \ln^2 2 - \frac{5}{3} = 4\bar{x} - 2 + \ln^2 2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_6)}{6} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$.

δ. Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)+\sqrt{x+4}-4}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(1+x)-2}{x} + \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(1+x)-f(1)}{x} + \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right] = \lambda$

αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = f'(1) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$.

Επομένως $\lambda = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Άρα $i^2 - 3i + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow i^2 - 3i + 2 = 0$, με ρίζες i = 1 και i = 2. Επομένως $\Gamma = \{\omega_1, \omega_2\}$. $\Gamma \subseteq A$ άρα $A \cap \Gamma = \Gamma$ και $P(A \cap \Gamma) = P(\Gamma)$.

$P(A - \Gamma) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Άρα $P(\Gamma) = \frac{1}{6}$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ