ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-P(A)\cdot x-P(A')}{\sqrt{x}-1} & x\in[0,1)\cup(1,+\infty)\\ 2+3P(B) & x=1\end{cases}$$

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με τις αντίστοιχες συχνότητές τους με $\bar{x}=3$.
Να βρεθούν οι πιθανότητες P(A), P(B) ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

x_i	v_i
1	2P(A)
2	3P(B)
3	2P(A) + 6P(B)
4	3P(Ω)

ΛΥΣΗ

$$\bar{x}=3\Leftrightarrow\frac{1\cdot 2P(A)+2\cdot 3P(B)+3\cdot\left(2P(A)+6P(B)\right)+4\cdot 3P(\Omega)}{2P(A)+3P(B)+2P(A)+6P(B)+3P(\Omega)}=3\Leftrightarrow\frac{8P(A)+24P(B)+12}{4P(A)+9P(B)+3}=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8P(A)+24P(B)+12=12P(A)+27P(B)+9\Leftrightarrow 4P(A)+3P(B)=3\quad\textbf{(1)}$$

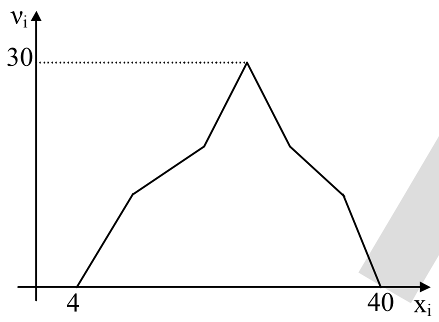
Για να είναι η f συνεχής στο $x_o = 1$ θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ **(2)**

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-P(A)\cdot x-P(A')}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-P(A)\cdot x-1+P(A)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)-P(A)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1-P(A))}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1-P(A))\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\left[(x+1-P(A))\cdot(\sqrt{x}+1)\right]=2\cdot(2-P(A)).$$

Από **(2)** έχουμε $2\cdot(2-P(A))=2+3P(B)\Leftrightarrow 2P(A)+3P(B)=2$ άρα $\begin{cases}2P(A)+3P(B)=2\\ 4P(A)+3P(B)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(A)=\dfrac{1}{2}\\ P(B)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 2



Σε ένα δείγμα 90 παρατηρήσεων, ομαδοποιήσαμε τα δεδομένα σε κλάσεις ίσου πλάτους c. Θεωρώντας ότι το πολύγωνο των απόλυτων συχνοτήτων του που παριστάνεται στο παραπάνω σχήμα, είναι τρίγωνο

i. να βρείτε το πλάτος c των κλάσεων.
ii. να βρείτε το πλήθος κ των κλάσεων.
iii. να βρείτε το εύρος R του δείγματος.
iv. αν οι σχετικές συχνότητες της $1^{ης}$ και της $5^{ης}$ κλάσης είναι ίσες, καθώς επίσης της $2^{ης}$ και της $4^{ης}$ και ισχύει ότι $v_1 - v_2 = 2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

ΛΥΣΗ

i. Το εμβαδόν του πολυγώνου των απόλυτων συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος.
Δηλ. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{40-4}{c}\cdot 30=90\Leftrightarrow c=6.$

ii. Επειδή για την κατασκευή του πολυγώνου συχνοτήτων θεωρούμε δύο ακόμα κλάσεις, μία στην αρχή και μία στο τέλος με συχνότητα μηδέν, το πλήθος κ των κλάσεών του είναι:
$\dfrac{c}{2}+\kappa\cdot c+\dfrac{c}{2}=40-4\Leftrightarrow c+\kappa c=36\Leftrightarrow c(1+\kappa)=36\Leftrightarrow 6(1+\kappa)=36\Leftrightarrow 1+\kappa=6\Leftrightarrow\kappa=5.$

iii. Το εύρος R το υπολογίζουμε από τον τύπο $c=\dfrac{R}{\kappa}\Leftrightarrow R=c\cdot\kappa\Leftrightarrow R=6\cdot 5\Leftrightarrow R=30.$

iv. Παρατηρούμε από το πολύγωνο συχνοτήτων ότι $\nu_3 = 30$ και

$f_1 = f_5 \Leftrightarrow \nu_1 = \nu_5$

$f_2 = f_4 \Leftrightarrow \nu_2 = \nu_4$

$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 90$

Άρα $2\nu_1 + 2\nu_2 + 30 = 90 \Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 = 30.$ Όμως $\nu_2 - \nu_1 = 2$

Επομένως $\nu_1 = 14$ και $\nu_2 = 16$

[,)	x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
[7, 13)	10	14	140
[13, 19)	16	16	256
[19, 25)	22	30	660
[25, 31)	28	16	448
[31, 37)	34	14	476
Σύνολο		90	1980

$$\overline{x} = \frac{1}{90}\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i = \frac{1980}{90} = 22.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\alpha \cdot x^2 - \beta \cdot x + 1$, όπου $\alpha \in \{1,2,3,4,5,6\}$ και $\beta \in \{3,5,7\}$.

Να προσδιοριστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:

i. Χ: «η f έχει ακρότατο σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (1, 3)$».

ii. Ψ: «η f έχει στο $B\big(1, f(1)\big)$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ ».

ΛΥΣΗ

Η f παραγωγίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ ως πολυώνυμο με $f'(x) = \alpha \cdot x - \beta.$

Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in (1,3)$ έχουμε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\beta}{\alpha}.$

Όμως $1 < x_0 < 3 \Leftrightarrow 1 < \frac{\beta}{\alpha} < 3 \Leftrightarrow \alpha < \beta < 3\alpha$ **(1)**

Οι δυνατές περιπτώσεις επιλογής των α, β φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

α \ β	3	5	7
1	(1, 3)	(1, 5)	(1, 7)
2	(2, 3)	(2, 5)	(2, 7)
3	(3, 3)	(3, 5)	(3, 7)
4	(4, 3)	(4, 5)	(4, 7)
5	(5, 3)	(5, 5)	(5, 7)
6	(6, 3)	(6, 5)	(6, 7)

i. Από την **(1)** έχουμε ότι οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Χ είναι:

Χ = {(2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7)}.

Έχουμε $N(\Omega) = 18$ και $N(X) = 8$.

Από κλασικό ορισμό πιθανότητας έχουμε $P(X) = \frac{N(X)}{N(\Omega)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$

ii. Εφόσον η f έχει στο $B\big(1, f(1)\big)$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ ισχύει

$f'\big(1\big) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$

Επομένως $\Psi = \big\{(3,3),(5,5)\big\}$ και $P(\Psi) = \frac{N(\Psi)}{N(\Omega)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ