## Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e\ln x}{4x}, x>0$, και δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ **(1)** με $P(A\cap B)\neq 0$ και η μέγιστη τιμή της f ισούται με το P(A).

**i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το P(A).

**ii.** Να αποδείξετε ότι $\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}\le\left[P(A\cup B)\right]^{P(A)}$ και $P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')$.

**iii.** Αν η διάμεσος των $P(A\cap B),\left[P(A\cap B)\right]^{P(A\cup B)},\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)},\left[P(A\cup B)\right]^{P(A)},\left[P(A\cup B)\right]^{P(A\cap B)}$ είναι $\delta=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cup B), P(B), P(A\cap B), P(A'\cap B')$

## Λύση

**i.** Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων, με $f'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{4x^2}$. Έχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$$
. Έτσι, έχουμε τον πίνακα

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Ο.Μ.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο e, με τιμή $f(e)=\frac{1}{4}$. Επομένως, έχουμε $P(A)=\frac{1}{4}$.

**ii.** Από **(i)** είδαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,e], άρα και στο (0,1]. Έτσι, έχουμε

$$A\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(P(A)\right)\le f\left(P(A\cup B)\right)\Leftrightarrow \frac{e\ln\left(P(A)\right)}{4P(A)}\le\frac{e\ln\left(P(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}\Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B)\cdot\ln\left(P(A)\right)\le P(A)\cdot\ln\left(P(A\cup B)\right)\Leftrightarrow \ln[P(A)]^{P(A\cup B)}\le\ln[P(A\cup B)]^{P(A)}\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow}\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}\le\left[P(A\cup B)\right]^{P(A)}$$

Για τα ενδεχόμενα $A', B'$ έχουμε

$$P(A'\cap B')=P(A'-B)=P(A')-P(A'\cap B)=P(A')-P(B-A)=P(A')-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)\overset{(1)}{=}$$
$$=P(A')-\left(P(B)-P(A)\cdot P(B)\right)=P(A')-P(B)\left(1-P(A)\right)=P(A')-P(B)P(A')=P(A')\left(1-P(B)\right)=P(A')\cdot P(B').$$

**iii.** Από το ερώτημα **(ii),** έχουμε $\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}\le\left[P(A\cup B)\right]^{P(A)}$.

Επιπλέον, έχουμε $A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\overset{P(A\cup B)\le 1}{\Leftrightarrow}\left[P(A\cup B)\right]^{P(A)}\le\left[P(A\cup B)\right]^{P(A\cap B)}$.

Όμοια, παίρνουμε $P(A\cup B)\le 1\overset{0<P(A\cap B)\le 1}{\Leftrightarrow}P(A\cap B)\le\left[P(A\cap B)\right]^{P(A\cup B)}$.

Έχουμε $P(A\cap B)\le P(A)\Leftrightarrow\left[P(A\cap B)\right]^{P(A\cup B)}\le\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}$.

Τελικά είναι $P(A\cap B)\le\left[P(A\cap B)\right]^{P(A\cup B)}\le\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}\le\left[P(A\cup B)\right]^{P(A)}\le\left[P(A\cup B)\right]^{P(A\cap B)}$, δηλαδή

$\delta=\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}$. Επομένως είναι $\delta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[P(A)\right]^{P(A\cup B)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^{P(A\cup B)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Από τον προσθετικό νόμο και τη σχέση **(1),** έχουμε

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+P(B)-\frac{1}{4}P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$. Τέλος, από **(ii)** έχουμε

$$P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')=(1-P(A))(1-P(B))=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

**Άσκηση 2**

Ένα δείγμα έχει μέση τιμή $\bar{x} \neq 0$ και τυπική απόκλιση s . Επίσης δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x^2+2x+2}{x-1} \cdot s, & 0 \leq x \neq 1 \\ \dfrac{-\bar{x}}{5}, & x = 1 \end{cases}$$

**α.** Εάν η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

**β.** Για δύο ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, ισχύουν ότι $P(A' \cap B') = \frac{4}{9}$ και $9P^2(B) - 14P(B) + 5 \leq 0$. Να δείξετε ότι :

i. $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$

ii. $B = A \cup B$ και $A = A \cap B$

**γ.** Δίνονται 6 παρατηρήσεις $t_1 = P(\varnothing)$, $t_2 = P(A)$, $t_3 = P(B)$, $t_4 = P(A \cup B)$, $t_5 = P(A \cap B)$, $t_6 = P(\Omega)$, από το αρχικό δείγμα με $\delta = \frac{1}{3}$ και Α , Β τα ενδεχόμενα του ερωτήματος β.

i. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{9}$ .

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου “ να πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α και Β ”.

**Λύση**

**α.** Για $0 \leq x \neq 1$ έχουμε $f(x) = \dfrac{-4x^2+2x+2}{x-1} \cdot s = \dfrac{-4(x-1)\cdot(x+\frac{1}{2})}{x-1} \cdot s = -4(x+\frac{1}{2}) \cdot s$ . Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1}[-4(x+\frac{1}{2}) \cdot s] = \frac{-\bar{x}}{5} \Leftrightarrow -4\frac{3}{2} \cdot s = \frac{-\bar{x}}{5} \Leftrightarrow -6 \cdot s = \frac{-\bar{x}}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow CV = \frac{1}{30} < \frac{1}{10}$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

**β.i.** $P(A' \cap B') = P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B) = 1 - P(A) - P(B-A) = 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - P(A \cup B)$

$P(A' \cap B') = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{5}{9}$ .

**ii.** Για το ενδεχόμενο Β ισχύει ότι : $B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B) \Leftrightarrow P(B) \leq \frac{5}{9}$ **(1)**.Επίσης έχουμε :

$9P^2(B) - 14P(B) + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 9P^2(B) - 9P(B) - 5P(B) + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 9P(B)(P(B)-1) - 5(P(B)-1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(P(B)-1)(9P(B)-5) \leq 0 \overset{P(B)\leq 1}{\Leftrightarrow} 9P(B) - 5 \geq 0 \Leftrightarrow P(B) \geq \frac{5}{9}$ **(2)** .Από **(1)** και **(2)** έχουμε ότι $P(B) = \frac{5}{9}$ . Επειδή τα ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(B)$ και $B \subseteq (A \cup B)$ άρα $B = A \cup B$ .Έχουμε ότι $B = A \cup B$ άρα $A \subseteq B$ επομένως $A \cap B = A$ .

**γ. i**. Έχουμε ότι : $\varnothing \subseteq A \cap B = A \subseteq B = A \cup B \subseteq \Omega$ άρα οι παρατηρήσεις είναι :

$t_1 = 0, t_2 = P(A), t_3 = P(A), t_4 = P(B), t_5 = P(B), t_6 = 1$ με διάμεσο $\delta = \frac{1}{3}$ . Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ν = 6 δηλαδή άρτιο η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα της 3$^{ης}$ και 4$^{ης}$ παρατήρησης. Δηλαδή

$\delta = \dfrac{P(A)+P(B)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{P(A)+\frac{5}{9}}{2} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{1}{9}$ .

**ii.** Το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α και Β είναι $(A-B)\cup(B-A)$ . Όμως $A \subseteq B$ δηλαδή $A - B = \varnothing$, άρα $P((A-B)\cup(B-A)) = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ .


**ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ**

**ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ**
**ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ**
**ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ**
**ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ**
**ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ**