Άσκηση 1

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[0,2] \to \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $x^2 f(x) + 2x\int_{x+2}^{2x} f(t-x)dt = f'(x)$ **(1)** για κάθε $x \in [0,2]$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2)$, ώστε $f''(\xi) = 2f(2)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,2).

iii. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 \in (0,2)$ τοπικό ακρότατο, να δείξετε ότι $f(x_0) = \dfrac{2f(0)}{x_0^3 + 2}$.

iv. Αν $f(0) = 0$, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή για κάθε $x \in [0,2]$.

Λύση

i. Θέτουμε στο ολοκλήρωμα της σχέσης **(1)**, όπου u = t − x, οπότε $du = (t-x)'dt \Leftrightarrow du = dt$ και για $t = x+2$ είναι $u_1 = 2$, ενώ για t = 2x είναι $u_2 = x$.

Επομένως η σχέση **(1)** γίνεται: $x^2 f(x) + 2x\int_2^x f(u)du = f'(x)$ **(2)**.

Αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο [0, 2] η $\int_2^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη και η f' θα είναι επίσης παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για x = 0 και x = 2 από τη σχέση **(2)** παίρνουμε: $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 4f(2)$. Για την f' ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο [0, 2], άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ (0, 2), ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(2) - f'(0)}{2-0} = \dfrac{4f(2) - 0}{2} = 2f(2)$.

ii. Από τη σχέση **(2)** ισοδύναμα έχουμε: $\left(x^2\int_2^x f(u)du\right)' = f'(x)$ άρα $x^2\int_2^x f(u)du = f(x) + c$ **(3).** Για x = 0 και για x = 2 έχουμε $f(0) + c = f(2) + c = 0 \Leftrightarrow f(0) = f(2) = -c$. **(4).** Αφού $f(0) = f(2)$, η f είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2) από θεώρημα Rolle, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0, 2).

iii. Για κάθε $x \in (0,2]$ από τη σχέση **(3)** έχουμε:

$$\int_2^x f(u)du = \frac{f(x)+c}{x^2}.$$

$$\text{Άρα}\left(\int_2^x f(u)du\right)' = \left(\frac{f(x)+c}{x^2}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2x\left(f(x)+c\right)}{x^4} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x) - 2c}{x^3} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x) + 2f(0)}{x^3} \Leftrightarrow x^3 f(x) + 2f(x) = xf'(x) + 2f(0) \Leftrightarrow$$

$$(x^3+2)f(x) = xf'(x) + 2f(0).$$

Αφού η f παρουσιάζει για $x = x_0$ τοπικό ακρότατο θα είναι (θεώρημα Fermat) $f'(x_0) = 0$. Για $x = x_0$ η προηγούμενη σχέση γίνεται: $(x_0^3+2)f(x_0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(x_0) = \dfrac{2f(0)}{x_0^3+2}$.

iv. Αν $f(0) = 0$ τότε λόγω του **ii.** θα είναι και $f(2) = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2] έχει στο [0, 2] και ελάχιστο $\mu = f(x_1)$ και μέγιστο $M = f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [0,2]$. Αν $x_1 = 0$ ή 2 τότε $f(x_1) = 0$. Ομοίως αν $x_2 = 0$ ή 2 τότε $f(x_2) = 0$. Αν $x_1, x_2 \in (0,2)$ τότε $f(x_1) = \dfrac{2f(0)}{x_1^3+2} = 0$ και $f(x_2) = \dfrac{2f(0)}{x_2^3+2} = 0$. Άρα μ = Μ = 0 για κάθε $x_1, x_2 \in [0,2]$.

Επομένως για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $\mu \le f(x) \le M \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, όπου f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν η F δεν παρουσιάζει ελάχιστο τότε να δείξετε ότι :

i. F γνησίως μονότονη

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

iii. η εξίσωση $\int_0^{\int_0^x f(t)dt} f(t)dt = \int_0^{2014} f(t)dt$ έχει μια ακριβώς λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση

i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0)=0$

- $x<x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0) \Leftrightarrow f(x)<0$ (1)
- $x>x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$ (2)

Επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, η F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x)$. Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι F $\searrow$(γνησίως φθίνουσα) στο $(-\infty,x_0]$ και F $\nearrow$(γνησίως αύξουσα) στο $[x_0,+\infty)$, δηλαδή η F παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.Άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Ακόμη f συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς F γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε $f(x)\neq 0$, δηλαδή $f(x_0)>0$ ή $f(x_0)<0$. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_F στο $M(x_0,F(x_0))$ είναι $y-F(x_0)=F'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=f(x_0)\cdot x-f(x_0)\cdot x_0+F(x_0)$.Όμως $F'(x)=f(x), x\in\mathbb{R}$ και f $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα F κυρτή στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς $F(x)\geq f(x_0)\cdot x-f(x_0)\cdot x_0+F(x_0)$ (3), με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$.Θεωρούμε $g(x)=f(x_0)\cdot x-x_0\cdot f(x_0)+F(x_0)$.

- Αν $f(x_0)<0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$,οπότε g (x) > 0, για αρκετά μικρά x < 0. Συνεπώς από (3) για αρκετά μικρά

  x< 0 προκύπτει $0<\dfrac{1}{F(x)}\leq\dfrac{1}{g(x)}$. Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{F(x)}=0$. Ακόμη

  F (x) > 0 για αρκετά μικρά x < 0, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{F(x)}}=+\infty$.

- Αν $f(x_0)>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ και όμοια με παραπάνω αποδεικνύουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

iii. $\int_0^{\int_0^x f(t)dt} f(t)dt=\int_0^{2014} f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^{F(x)} f(t)dt=\int_0^{2014} f(t)dt \Leftrightarrow F(F(x))=F(2014) \overset{F\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} F(x)=2014 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)-2014=0 \Leftrightarrow h(x)=0$

Από **ii** είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$, τότε υπάρχει $x_1<0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $h(x_1)>0$. Ακόμη $h(0)=-2014<0$ και h συνεχής στο $[x_1,0]$ ως διαφορά συνεχών. Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$. Όμως η h γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα η ρίζα είναι μοναδική. Ομοίως αν $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

Άσκηση 3

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)>0 \quad \forall x>0$ και η

$f(x)=\int_\alpha^{x^3} e^{g(t)}dt,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)+\sqrt[3]{\alpha}f'(\sqrt[3]{\alpha})\geq f'(\sqrt[3]{\alpha})\cdot x,\ x>0$

Λύση

i. Η $e^{g(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών. Άρα η f(x) είναι παραγωγίσισμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=e^{g(x^3)}\cdot 3x^2\geq 0$, όπου $f'(x)=0$ μόνο για x = 0. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων. $f'(x)=e^{g(x^3)}\cdot 3x^2$ και

$f''(x)=6xe^{g(x^3)}+3x^2e^{g(x^3)}\cdot g'(x^3)\cdot 3x^2=6xe^{g(x^3)}+9x^4g'(x^3)e^{g(x^3)}>0$, για x > 0. Επομένως η f είναι κυρτή, στο $[0,+\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x=\sqrt[3]{\alpha}$ είναι $y-f(\sqrt[3]{\alpha})=f'(\sqrt[3]{\alpha})(x-\sqrt[3]{\alpha})$. Επειδή η f είναι κυρτή η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη για κάθε x > 0, δηλαδή $f(x)+\sqrt[3]{\alpha}\cdot f'(\sqrt[3]{\alpha})\geq f'(\sqrt[3]{\alpha})\cdot x,\ x>0$.

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ