

Άσκηση 1

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = \frac{2}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}$ (1) με $f(0) = 0$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι είναι «1-1» συνάρτηση. Στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο και τα κοίλα της f .
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και να δείξετε ότι $\ln |2x| < f(x) < |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
- Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{f(t)}{t} dt$.

Λύση

- Από την (1) έχουμε: $f'(x) = \frac{2}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Έτσι, για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Από (1) η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, με παράγωγο $f''(x) = -\frac{2f'(x)(e^{f(x)} - e^{-f(x)})}{(e^{f(x)} + e^{-f(x)})^2}$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f(x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2f'(x)(e^{f(x)} - e^{-f(x)})}{(e^{f(x)} + e^{-f(x)})^2} > 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} < 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} < e^{-f(x)} \Leftrightarrow f(x) < -f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$.

- Έχουμε $f(0) = 0$ και $f'(0) = \frac{2}{e^{f(0)} + e^{-f(0)}} = \frac{2}{e^0 + e^0} = 1$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η $(\varepsilon): y = x$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, για $x < 0$ έχουμε $x < f(x)$. Ακόμη για $x < 0$ έχουμε ότι $f(x) < 0$ άρα $x < f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < -f(x) < -x \Leftrightarrow |f(x)| < |x|$ για κάθε $x < 0$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, για $x > 0$ έχουμε $f(x) < x$. Ακόμη για $x > 0$ έχουμε ότι $f(x) > 0$ άρα $0 < f(x) < x \Leftrightarrow |f(x)| < |x|$ για κάθε $x > 0$. Οπότε $|f(x)| < |x|$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από την (1) έχουμε: $f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$ $\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$.

Για $x = 0$ βρίσκουμε $c = 0$ άρα $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ (3).

Από την (3) για $x > 0$ έχουμε: $e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)} > 2x$ άρα $e^{f(x)} > 2x > 0 \Leftrightarrow f(x) > \ln 2x \Leftrightarrow |f(x)| > \ln |2x|$ $\begin{matrix} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{matrix}$

και για $x < 0$: $e^{-f(x)} = e^{f(x)} - 2x > -2x$ άρα $e^{-f(x)} > -2x > 0 \Leftrightarrow -f(x) > \ln(-2x) \Leftrightarrow |f(x)| > \ln |2x|$ $\begin{matrix} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix}$.

Οπότε $|f(x)| > \ln |2x|$ (4) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από (2) και (4) έχουμε τελικά $\ln |2x| < f(x) < |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Από την (3) έχουμε $e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ή

$e^{f(x)} = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Όμως $x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1}$. Ισχύει $e^{f(x)} > 0$ άρα

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

iii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = -\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, άρα $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1» συνάρτηση άρα αντιστρέφεται με $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Θέτουμε στην (3) $y = f(x)$ και έχουμε:

$$e^y - e^{-y} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}. \text{ Τελικά } f^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

iv. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$.

Από το ερώτημα (ii), για $t > 0$ έχουμε

$$\ln |2t| < |f(t)| < t \Leftrightarrow \ln 2t < f(t) < t \Leftrightarrow \frac{\ln 2t}{t} < \frac{f(t)}{t} < 1 \Rightarrow \int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{\ln 2t}{t} dt < \int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{f(t)}{t} dt < \int_{2^x}^{2^{x+1}} 1 dt.$$

Οπότε, έχουμε

$$\int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{\ln 2t}{t} dt = \int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{1}{2} (\ln^2 2t)' dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2 2t \right]_{2^x}^{2^{x+1}} = \frac{\ln^2(2^{x+1}) - \ln^2(2^x)}{2} = \frac{[(x+2)\ln 2]^2 - [x\ln 2]^2}{2} = \frac{(2x+3)\ln^2 2}{2}.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{\ln 2t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+3)\ln^2 2}{2} = +\infty$. Επιπλέον, $\int_{2^x}^{2^{x+1}} 1 dt = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2^x}^{2^{x+1}} 1 dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$.

Από κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2^x}^{2^{x+1}} \frac{f(t)}{t} dt = +\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_a^{\ln x} \frac{\eta\mu(e^t)}{t^2 - 1} dt$, $1 < a < \ln \pi$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να μελετήσετε την μονοτονία της, στο διάστημα $\Delta = (e, \frac{3\pi}{2}]$.
- Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = e$.
- Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\Delta = (e, \frac{3\pi}{2}]$.

Λύση

- Η $\frac{\eta\mu(e^t)}{t^2 - 1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και το $a \in (1, +\infty)$.

Ακόμη για $x > 0$ απαιτούμε $\ln x \in (1, +\infty) \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$. Τελικά $D_f = (e, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη

συνάρτηση για κάθε $x \in (e, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\eta\mu x}{(\ln^2 x - 1)} \cdot (\ln x)' = \frac{\eta\mu x}{x \cdot (\ln^2 x - 1)}$.

Έχουμε για $x > e \Leftrightarrow \ln x > 1 \Rightarrow \ln^2 x - 1 > 0 \Leftrightarrow x(\ln^2 x - 1) > 0$ (1). Ακόμη για $x \in (e, \frac{3\pi}{2}]$ έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x \cdot (\ln^2 x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi \text{ και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x \cdot (\ln^2 x - 1)} > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow e < x < \pi.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	e	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

TM

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e, \pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ii. Για $e < x < e^a < \pi \Leftrightarrow 1 < \ln x < a < \ln \pi$ θεωρούμε t τέτοιο ώστε :

$$1 < \ln x \leq t \leq a < \ln \pi \Leftrightarrow e < x \leq e^t \leq e^a < \pi \xLeftrightarrow[\eta_{\mu x} \downarrow]{x \in (e, \pi)} 0 < \eta_{\mu e^a} \leq \eta_{\mu e^t} \leq \eta_{\mu x} \xLeftrightarrow[t > 1]{\eta_{\mu e^t} \leq \eta_{\mu x}} \frac{\eta_{\mu e^a}}{t^2 - 1} \leq \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} \leq \frac{\eta_{\mu x}}{t^2 - 1} \quad (2).$$

Ολοκληρώνοντας την (2) παίρνουμε : $\int_{\ln x}^a \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} dt \leq \int_{\ln x}^a \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} dt \leq \int_{\ln x}^a \frac{\eta_{\mu x}}{t^2 - 1} dt$

$$\eta_{\mu x} \cdot \int_a^{\ln x} \frac{1}{t^2 - 1} dt \leq \int_a^{\ln x} \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} dt \leq \eta_{\mu e^a} \cdot \int_a^{\ln x} \frac{1}{t^2 - 1} dt \quad (3).$$

$$\begin{aligned} \text{Θέτουμε } I(x) &= \int_a^{\ln x} \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int_a^{\ln x} \frac{(t+1) - (t-1)}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_a^{\ln x} \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{2} \cdot \int_a^{\ln x} \frac{1}{t+1} dt \stackrel{t > 1}{=} \frac{1}{2} [\ln(t-1)]_a^{\ln x} - \frac{1}{2} [\ln(t+1)]_a^{\ln x} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{a+1}{a-1}. \text{ Ισχύει } \lim_{x \rightarrow e^+} (\ln x - 1) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow e^+} I(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{a+1}{a-1} = -\infty. \end{aligned}$$

Η (3) γράφεται : $\eta_{\mu x} \cdot I(x) \leq f(x) \leq \eta_{\mu e^a} \cdot I(x)$ και $\lim_{x \rightarrow e^+} (\eta_{\mu x} \cdot I(x)) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^+} (\eta_{\mu e^a} \cdot I(x)) \stackrel{\eta_{\mu e^a} > 0}{=} -\infty$. Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = e$.

iii. Έχουμε $a < \ln \pi \Leftrightarrow e^a < \pi$. Τότε στο διάστημα $\Delta_1 = (e, \pi]$ η f έχει προφανή ρίζα την $\rho_1 = e^a$. Το ρ_1 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 . Θεωρούμε t τέτοιο ώστε $1 < a < t < \ln \pi$ και έχουμε :

$$1 < a < t < \ln \pi \Leftrightarrow e < e^a < e^t < \pi \xRightarrow[\eta_{\mu x} \downarrow]{x \in (e, \pi)} \eta_{\mu e^t} > \eta_{\mu \pi} \Leftrightarrow[t > 1]{\eta_{\mu e^t} > \eta_{\mu \pi}} \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} > 0 \text{ ισχύει } \int_a^{\ln \pi} \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} dt > 0 \Leftrightarrow f(\pi) > 0.$$

Επίσης θεωρούμε t τέτοιο ώστε $1 < a < \ln \pi < t < \ln \frac{3\pi}{2}$ και έχουμε :

$$1 < a < \ln \pi < t < \ln \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow e < e^a < \pi < e^t < \frac{3\pi}{2} \xRightarrow[\eta_{\mu x} \downarrow]{x \in (e, \frac{3\pi}{2})} \eta_{\mu e^t} < \eta_{\mu \frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow[t > 1]{\eta_{\mu e^t} < \eta_{\mu \frac{3\pi}{2}}} \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} < 0 \text{ ισχύει } \int_a^{\ln \frac{3\pi}{2}} \frac{\eta_{\mu e^t}}{t^2 - 1} dt < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0.$$

Στο διάστημα $\Delta_2 = [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα $f(\Delta_2) = [f(\frac{3\pi}{2}), f(\pi)]$. Το $0 \in [f(\frac{3\pi}{2}), f(\pi)]$ άρα υπάρχει $\rho_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 0$. Το ρ_2 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 . Τελικά η f έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $\Delta = (e, \frac{3\pi}{2}]$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ