ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν: $f(1)=1$ και

$\int_1^x tf'(t)dt-\int_{\frac{x}{3}}^{\frac{2x}{3}} f(3t-x)dt=\int_x^3 t^2f'(t)dt$ για κάθε $x\ge 0$.

(i) Να βρείτε τον τύπο της f.
(ii) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
(iii) Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε θετική παράμετρο α ισχύει $f(x)\le(3\alpha^2+2\alpha+x)f'(\alpha)$ για κάθε $x\ge 0$.
(iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\frac{f(x)(3x+4)}{3(x+1)}dx$.

ΛΥΣΗ

(i) Έστω $I=\int_{\frac{x}{3}}^{\frac{2x}{3}} f(3t-x)dt$ και $u=3t-x$. Τότε $du=3dt$, $u_1=0$ και $u_2=x$. Έτσι $I=\frac{1}{3}\int_0^x f(u)du$ και η δοσμένη σχέση γίνεται: $\int_1^x tf'(t)dt-\frac{1}{3}\int_0^x f(u)du+\int_3^x t^2f'(t)dt=0$ (1) , $x\ge 0$. Οι συναρτήσεις $tf'(t)$, $f(u)$, και $t^2f'(t)$ είναι συνεχείς άρα οι $\int_1^x tf'(t)dt$, $\int_0^x f(u)du$ και $\int_3^x t^2f'(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0,+\infty)$. Έτσι από την (1) έχουμε:

$xf'(x)-\frac{1}{3}f(x)+x^2f'(x)=0\Leftrightarrow(x^2+x)f'(x)-\frac{1}{3}f(x)=0$ και για $x>0$: $f'(x)-\frac{1}{3(x^2+x)}f(x)=0.$ (2).

$$\int_1^x\left(-\frac{1}{3(t^2+t)}\right)dt=-\frac{1}{3}\int_1^x\frac{1}{t(t+1)}dt=-\frac{1}{3}\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{3}\left[\ln t-\ln(t+1)\right]_1^x=-\frac{1}{3}\left(\ln\frac{x}{x+1}+\ln 2\right),\ x>0.$$

Επομένως μια παράγουσα της $-\frac{1}{3(x^2+x)}$ είναι η $-\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x+1}=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $x>0$. Πολλαπλασιάζοντας την (2) με $e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}$ έχουμε: $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}f'(x)+\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)'f(x)=0\Leftrightarrow\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot f(x)\right)'=0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Για $x=1$ είναι $c=\sqrt[3]{2}$, οπότε $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}$, $x>0$. Από τη σχέση $(x^2+x)f'(x)-\frac{1}{3}f(x)=0$ για $x=0$ έχουμε ότι $f(0)=0$. Άρα $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}$, $x\ge 0$.

(ii) Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f'(x)=\frac{f(x)}{3(x^2+x)}$, $x>0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f''(x)=\frac{f'(x)\cdot3(x^2+x)-f(x)\cdot3(2x+1)}{9(x^2+x)^2}\overset{(2)}{=}\frac{\frac{1}{3}f(x)-f(x)\cdot(2x+1)}{3(x^2+x)^2}=-\frac{2(3x+1)f(x)}{9(x^2+x)^2}<0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Άρα η f είναι κοίλη.

(iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ είναι $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.
Όμως η f είναι κοίλη άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο Α, με εξαίρεση το σημείο επαφής.
Επομένως για κάθε $x\ge 0$ ισχύει:

$$f(x)\le f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f(x)\le f'(\alpha)(x-\alpha)+f'(\alpha)\cdot3(\alpha^2+\alpha)\Leftrightarrow f(x)\le(3\alpha^2+2\alpha+x)f'(\alpha) \text{ για κάθε } x\ge 0.$$

(iv) $$\int_0^1\frac{f(x)(3x+4)}{3(x+1)}dx=\int_0^1\frac{f(x)(3x+3)+f(x)}{3(x+1)}dx=\int_0^1\left(f(x)+\frac{f(x)}{3(x+1)}\right)dx\overset{(2)}{=}\int_0^1\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=\int_0^1(xf(x))'dx=$$
$$=[xf(x)]_0^1=f(1)=1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

(i) Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x^3+x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g του ερωτήματος (i) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cg στο σημείο $A(2,g(2))$. (Να θεωρήσετε γνωστό ότι αν μια 1-1 συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε και η αντίστροφη της είναι συνεχής στο διάστημα $f(\Delta)$).

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την Cg και την εφαπτομένη (ε) του ερωτήματος (ii).

ΛΥΣΗ

(i) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 οπότε και αντιστρέψιμη.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$ Έτσι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(f(x))=x \Leftrightarrow f^{-1}(x^3+x)=x,\ x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση $g(x)=f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ερωτήματος (i).

(ii) Έστω $x_o\in\mathbb{R}$ τυχαίο, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_o)}{x-x_o},\quad x\neq x_0$

Θέτουμε $u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u)$. $u_o=\lim\limits_{x\to x_o}u=\lim\limits_{x\to x_o}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_o)$ (αφού η f^{-1} είναι συνεχής στο x_0).

Επομένως

$$\lim_{u\to u_o}\frac{u-u_o}{f(u)-x_o}=\lim_{u\to u_o}\frac{1}{\dfrac{f(u)-f(u_o)}{u-u_o}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to u_0}\dfrac{f(u)-f(u_o)}{u-u_o}}=\frac{1}{f'(u_o)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}=\frac{1}{f'(g(x_o))}=\frac{1}{3g^2(x_0)+1}\in\mathbb{R}.$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))},\ x\in\mathbb{R}$.

$g(2)=f^{-1}(2)=1$ αφού $f(1)=2$. $g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cg στο σημείο $A(2,g(2))$ είναι: $(\varepsilon): y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-1=\dfrac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

(iii) Τα κοινά σημεία των C_g και (ε) είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=f\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x=\left(\frac{x+2}{4}\right)^3+\frac{x+2}{4}\Leftrightarrow 64x=x^3+6x^2+12x+8+16x+32\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^3+6x^2-36x+40=0\overset{\text{Homer}}{\Leftrightarrow}(x-2)(x^2+8x-20)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-10$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E=\int_{-10}^{2}\left|g(x)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)\right|dx$. Η συνάρτηση $h(x)=g(x)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)$ είναι συνεχής στο $(-10,2)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό άρα διατηρεί πρόσημο στο $(-10,2)$. $h(0)=g(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$ άρα $h(x)<0$ για κάθε $x\in(-10,2)$.

Άρα $E=\int_{-10}^{2}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-g(x)\right)dx=\int_{-10}^{2}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_{-10}^{2}g(x)dx$.

$$I_1=\int_{-10}^{2}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}\right]_{-10}^{2}=\frac{4}{8}+\frac{2}{2}-\frac{100}{8}+\frac{10}{2}=-6.$$

$I_2=\int_{-10}^{2}g(x)dx=\int_{-10}^{2}f^{-1}(x)dx$. Θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$. $dx=f'(u)du$, $u_1=f^{-1}(-10)=-2$ αφού $f(-2)=-10$ και $u_2=f^{-1}(2)=1$. Άρα $I_2=\int_{-2}^{1}uf'(u)du=\int_{-2}^{1}u(3u^2+1)du=\int_{-2}^{1}(3u^3+u)du=\left[\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-12-2=-\frac{51}{4}$.

Επομένως $E=I_1-I_2=-6+\frac{51}{4}=\frac{27}{4}$ τ.μ..

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ