

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει $4f(x) - x = \eta\mu f(x)$. (1)

- Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = tf(t) - 2f^2(t) - \sigma\upsilon\nu f(t) + 1$.
- Να αποδείξετε ότι $\int_1^x f(t)dt \leq f(x)(x-1)$.

ΛΥΣΗ

- Για κάθε $x < 0$ έχουμε :

$$4f(x) - x = \eta\mu f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{4} = \frac{\eta\mu f(x)}{4x}.$$

$$\text{Οπότε } \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{\eta\mu f(x)}{4x} \right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|4x|} = \frac{|\eta\mu f(x)|}{-4x} \leq \frac{1}{-4x} = -\frac{1}{4x}.$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{4} \right| \leq -\frac{1}{4x} \Leftrightarrow \frac{1}{4x} \leq \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4x} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x}.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4x} \right) = \frac{1}{4} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x} \right) = \frac{1}{4} \text{ με βάση το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x < 0 \text{ τότε } f(x) = xg(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{4}.$$

- Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχουμε : $4f(x) - x = \eta\mu f(x) \Leftrightarrow 4f(x) = x + \eta\mu f(x)$.

$$\text{Άρα } |4f(x)| = |x + \eta\mu f(x)| \leq |x| + |\eta\mu f(x)| \leq |x| + |f(x)| \text{ (Αφού } |\eta\mu x| \leq |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}).$$

$$\text{Οπότε } 4|f(x)| \leq |x| + |f(x)| \Leftrightarrow 3|f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow |f(x)| \leq \frac{|x|}{3} \Leftrightarrow -\frac{|x|}{3} \leq f(x) \leq \frac{|x|}{3}.$$

Για $x = 0$ η προηγούμενη σχέση γίνεται : $0 \leq f(0) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Δηλαδή το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Τα μέλη της σχέσης (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Άρα θα έχουμε :

$$(4f(x) - x)' = (\eta\mu f(x))' \Leftrightarrow 4f'(x) - 1 = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow 4f'(x) - \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(4 - \sigma\upsilon\nu f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{4 - \sigma\upsilon\nu f(x)} > 0 \text{ (Αφού } -1 \leq \sigma\upsilon\nu f(x) \leq 1)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, επομένως η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι μοναδική.

- Από το ερώτημα ii. έχουμε $f'(x) = \frac{1}{4 - \sigma\upsilon\nu f(x)}$, άρα η f' θα είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της σχέσης (1) με $f'(x)$ και έχουμε : $4f(x)f'(x) - xf'(x) = f'(x)\eta\mu f(x)$.

$$\text{Άρα } \int_0^1 (4f(x)f'(x) - xf'(x))dx = \int_0^1 f'(x)\eta\mu f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (4f(x)f'(x))dx - \int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 f'(x)\eta\mu f(x)dx \Leftrightarrow [2f^2(x)]_0^1 - [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = [-\sigma\upsilon\nu f(x)]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$2f^2(t) - 2f^2(0) - tf(t) + 0f(0) + \int_0^1 f(x)dx = -\sigma\upsilon\nu f(t) + \sigma\upsilon\nu f(0) \Leftrightarrow$$

$$2f^2(t) - tf(t) + \int_0^1 f(x)dx = -\sigma\upsilon\nu f(t) + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = tf(t) - 2f^2(t) - \sigma\upsilon\nu f(t) + 1.$$

- Έστω $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Αφού η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbf{R}$ με $F'(x) = f(x)$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν $x = 1$ η ζητούμενη σχέση προφανώς ισχύει.
- Αν $x < 1$ για την F ισχύει το ΘΜΤ στο διάστημα $[x, 1]$,

$$\text{άρα υπάρχει } \xi \in (x, 1) \text{ ώστε } F'(\xi) = \frac{F(1) - F(x)}{1 - x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{-F(x)}{1 - x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x)}{x - 1}.$$

$$\text{Όμως } \xi > x \Leftrightarrow f(\xi) > f(x) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x - 1} > f(x) \Leftrightarrow F(x) < (x - 1)f(x) \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt < (x - 1)f(x).$$

- Αν $x > 1$ εργαζόμαστε ομοίως.

$$\text{Άρα } \int_1^x f(t)dt \leq f(x)(x - 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: A \rightarrow A$, όπου A διάστημα του $\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν :

$$g''(x) \neq 0, \forall x \in A.$$

- $3 \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt = [g'''(x)]^3 + 3g'''(x), \forall x \in A$ (1)

Αν $(0, +\infty) \subseteq A_{g' \circ g'}$ και A το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $g'(g'(\int_0^x |\eta \mu t^2| dt)) < g'\left(g'\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)$, $x \in A_{g' \circ g'}$ (2) να δείξετε ότι:

- $A = (0, +\infty)$
- υπάρχουν $\alpha \in A$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in A$
- $e^{g(x)-g(\alpha)} > g'(\alpha)(x-\alpha)$, $\forall x \in A$
- υπάρχει $\xi \in A$ τέτοιο ώστε $\xi g'(\xi) \ln \xi + g(\xi) = \gamma$.

ΛΥΣΗ

- Είναι $g''(x) \neq 0$, $\forall x \in A$ με A διάστημα και g'' συνεχής ως παραγωγίσιμη. Άρα η g'' διατηρεί πρόσημο στο A , Δηλαδή $g''(x) > 0$, $\forall x \in A$ ή $g''(x) < 0$, $\forall x \in A$. Οπότε $g' \nearrow$ στο A ή $g' \searrow$ στο A , συνεπώς g' γνησίως μονότονη στο A . Εύκολα αποδεικνύουμε ότι $g' \circ g' \nearrow$ στο $A_{g' \circ g'} \subseteq A$ οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\int_0^x |\eta \mu t^2| dt < \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow \int_0^x |\eta \mu t^2| dt < \int_0^x t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^x (|\eta \mu t^2| - t^2) dt < 0, \quad x \in A_{g' \circ g'}. \quad (3)$$

Όμως $|\eta \mu x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ οπότε για $x = t^2$ προκύπτει $|\eta \mu t^2| \leq |t^2|$, $\forall t \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = 0$. Αν $x \leq 0$, τότε $\int_0^x (|\eta \mu t^2| - t^2) dt \geq 0$ απορρίπτεται λόγω της (3). Άρα $x > 0$ και $x \in A_{g' \circ g'}$, δηλαδή $x \in A_{g' \circ g'} \cap (0, +\infty)$. Όμως $(0, +\infty) \subseteq A_{g' \circ g'}$, οπότε $x \in (0, +\infty)$. Ακόμη A σύνολο των λύσεων της (2) άρα $A \subseteq A_{g' \circ g'}$. Τελικά $A = A_{g' \circ g'} = (0, +\infty)$.

- Θέτουμε $u = g''(x)$ οπότε η (1) γίνεται $3 \int_0^u e^{t^2} dt = u^3 + 3u \Leftrightarrow 3 \int_0^u e^{t^2} dt - u^3 - 3u = 0$ (4). Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = 3 \int_0^x e^{t^2} dt - x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Η e^{t^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $\int_0^x e^{t^2} dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $h'(x) = 3e^{x^2} - 3x^2 - 3 = 3(e^{x^2} - x^2 - 1)$. Όμως $\ln t \leq t - 1$, $\forall t > 0$ οπότε για $t = e^{x^2}$ έχουμε $e^{x^2} \geq x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Συνεπώς $h'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $h \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

$$\bullet \quad x < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$$

$$\bullet \quad x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$$

Τελικά $x = 0$ μοναδική ρίζα της h οπότε (4) $\Leftrightarrow h(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

$$\text{Άρα } g'''(x) = 0, \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow g''(x) = c_1 \Leftrightarrow g'(x) = c_1 x + c_2 \Leftrightarrow g(x) = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3, \quad x > 0.$$

Άρα υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha > 0$, ώστε $\alpha \in A$. Είναι $g(A) \subseteq A$, άρα $g(x) > 0$, $\forall x > 0$, οπότε $\alpha > 0$.

- Θεωρούμε $h(x) = e^{g(x)}$, $x > 0$. Η h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h''(x) = e^{g(x)}[g'(x)]^2 + e^{g(x)}g''(x) = e^{g(x)}([g'(x)]^2 + \alpha) > 0$, $\forall x > 0$. Άρα h κυρτή στο $(0, +\infty)$ οπότε η C_h είναι πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της (εκτός από το σημείο επαφής). Η εξίσωση εφαπτομένης της C_h στο $x_0 = \alpha$ είναι $y = e^{g(\alpha)} \cdot g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha)$ οπότε $h(x) \geq e^{g(\alpha)} \cdot g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha) > e^{g(\alpha)} \cdot g'(\alpha)(x - \alpha)$, $\forall x > 0$ άρα $e^{g(x)} > e^{g(\alpha)} g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow e^{g(x)-g(\alpha)} > g'(\alpha)(x - \alpha)$

- $x g'(x) \ln x + g(x) = \gamma \Leftrightarrow g'(x) \ln x + (g(x) - \gamma) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow ((g(x) - \gamma) \cdot \ln x)' = 0$. Θεωρούμε $G(x) = (g(x) - \gamma) \ln x$, $x > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in A$ τέτοιο ώστε $G'(\xi) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\alpha x^2 + \beta x) \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\alpha x + \beta) x \cdot \ln x) = 0, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Άρα η συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} G(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $H'(x) = G'(x)$ και

$H(0) = H(1) = 0$ αφού $H(1) = G(1) = 0$. Από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1) \subseteq A$ τέτοιο ώστε $H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi g'(\xi) \ln \xi + g(\xi) = \gamma$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ

ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ