

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\int_1^x x \cdot f(t)dt \geq e^x - \sin x - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

- i. $\int_0^1 f(t)dt = 1$.
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
- iii. Η εξίσωση $x \cdot f(x) + \int_0^x f(t)dt = 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.
- iv. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f(\xi_1)} + \frac{1}{f(\xi_2)} = 2$.

ΛΥΣΗ

- i. Από υπόθεση έχουμε $x \cdot \int_1^x f(t)dt - e^x + \sin x + 2x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $g(x) = x \cdot \int_1^x f(t)dt - e^x + \sin x + 2x$

$$g(0) = 0 \cdot \int_1^0 f(t)dt - e^0 + \sin 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = (x)' \cdot \int_1^x f(t)dt + x \left(\int_1^x f(t)dt \right)' - e^x - \eta \mu x + 2 \Leftrightarrow g'(x) = \int_1^x f(t)dt + x f(x) - e^x - \eta \mu x + 2 \quad (2)$$

Η (1) γράφεται $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 0$.

Από το θεώρημα Fermat έχουμε: $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt + 0 \cdot f(0) - e^0 - \eta \mu 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt + 1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 1$

- ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.

$$h(0) = \int_0^0 f(t)dt - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

•

$$h(1) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t)dt - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t)dt = \frac{1}{2}$$

- iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x \cdot \left(\int_0^x f(t)dt - 1 \right)$

- Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών.

- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με $\varphi'(x) = \int_0^x f(t)dt - 1 + x f(x)$

$$\varphi(0) = 0 \cdot \left(\int_0^0 f(t)dt - 1 \right) = 0$$

$$\varphi(1) = 1 \cdot \left(\int_0^1 f(t)dt - 1 \right) = 0$$

Από το θεώρημα Rolle η εξίσωση $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) + \int_0^x f(t)dt = 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

- iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

- Η F είναι συνεχής στα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$.

- Η F είναι παραγωγίσιμη στα $(0, x_0)$ και $(x_0, 1)$ με $F'(x) = f(x)$.

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα $[0, x_0]$ και $[x_0, 1]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοια ώστε:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x_0) - F(0)}{x_0 - 0} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{\frac{1}{2} - 0}{x_0} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{1}{2x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f(\xi_1)} = 2x_0 \text{ και}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(1) - F(x_0)}{1 - x_0} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - x_0} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - x_0} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{1}{2 - 2x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f(\xi_2)} = 2 - 2x_0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε: $\frac{1}{f(\xi_1)} + \frac{1}{f(\xi_2)} = 2x_0 + 2 - 2x_0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{f(\xi_1)} + \frac{1}{f(\xi_2)} = 2}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) + \int_1^x f(t)dt = f'(x)$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$.
- Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_0) = f(1) + \int_0^1 f(t)dt$.
- Να δείξετε ότι $f(0) = f(1)$.
- Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 \in (0,1)$ να δείξετε ότι $f(x_1) = \frac{f(0)}{x_1^2 + 1}$.
- Αν $f(0) = 0$ να δείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

ΛΥΣΗ

i. Από την (1) η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως άθροισμα παραγωγισίμων. Άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$.

ii. Η (1) για $x = 0$ και για $x = 1$ δίνει: $\int_1^0 f(t)dt = f'(0)$ και $f(1) = f'(1)$ (2)

Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0, 1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(x_0) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f''(x_0) = f'(1) - f'(0) \Leftrightarrow f''(x_0) = f(1) - \int_1^0 f(t)dt \Leftrightarrow f''(x_0) = f(1) + \int_0^1 f(t)dt$$

iii. Η (1) γράφεται: $x \cdot \left(\int_1^x f(t)dt \right)' + (x)' \cdot \int_1^x f(t)dt = (f(x))' \Leftrightarrow \left(x \cdot \int_1^x f(t)dt \right)' = (f(x))' \Leftrightarrow x \cdot \int_1^x f(t)dt = f(x) + c$ (3)

$$\begin{array}{ll} \text{Η (3) για } x = 0 & \text{και } x = 1 \text{ δίνει:} \\ 0 = f(0) + c & \text{και } 0 = f(1) + c \\ f(0) = -c & f(1) = -c \end{array}$$

Οπότε $f(0) = f(1)$

iv. Για $x \neq 0$ η (3) γράφεται: $\int_1^x f(t)dt = \frac{f(x) + c}{x}$. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) - c}{x^2} \Leftrightarrow x^2 f(x) = x \cdot f'(x) - f(x) + f(0) \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = x \cdot f'(x) + f(0) \quad (4)$$

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 \in (0,1)$ από το θεώρημα Fermat $f'(x_1) = 0$.

$$\text{Η (4) για } x = x_1 \text{ γράφεται: } (x_1^2 + 1)f(x_1) = x_1 \cdot f'(x_1) + f(0) \stackrel{f'(x_1)=0}{\Leftrightarrow} f(x_1) = \frac{f(0)}{x_1^2 + 1}$$

v. Αν $f(0) = 0$ τότε από iii. ερώτημα είναι και $f(1) = 0$.

Η f αφού είναι συνεχής στο $[0, 1]$ θα έχει μέγιστο $M = f(x_2)$ και ελάχιστο $\mu = f(x_3)$, $x_2, x_3 \in [0,1]$.

- Αν $x_2 \in (0,1)$ τότε από iv. έχουμε $f(x_2) = \frac{f(0)}{x_2^2 + 1} = 0$

- Αν $x_2 = 0$ ή 1 τότε προφανώς $f(x_2) = 0$

- Αν $x_3 \in (0,1)$ όμοια έχουμε $f(x_3) = \frac{f(0)}{x_3^2 + 1} = 0$

- Αν $x_3 = 0$ ή 1 τότε προφανώς $f(x_3) = 0$

Σε όλες τις περιπτώσεις $M = \mu = 0$. Δηλαδή $\mu \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 0$ άρα $\boxed{f(x) = 0}$ για κάθε $x \in [0,1]$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ