ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο σελ. 251
Α2. Σχολ. βιβλίο σελ. 273
Α3. Σχολ. βιβλίο σελ. 150
Α4. **α)** ► Λ **β)** ► Σ **γ)** ► Σ **δ)** ► Σ **ε)** ► Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0$. Θέτουμε $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ επομένως αντικαθιστώντας έχουμε:

$$2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4+(2x-2)i=0.$$

Άρα $2x-2=0\Leftrightarrow x=1$ και $2x^2+2y^2-4=0$. Για x=1 : $2\cdot 1^2+2y^2-4=0\Leftrightarrow 2y^2=2\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm 1$. Άρα $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ έχουμε $w=3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\cdot\left[\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{39}=3\cdot\left[\dfrac{1^2+2i+i^2}{2}\right]^{39}=$

$$=3\cdot\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{39}=3\cdot\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}=3(i)^{39}=-3i.$$

Β3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i|$ για $w=-3i$, $z_1=1+i$, $z_2=1-i$ έχουμε

$$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i|\Leftrightarrow|u-3i|=|4+4i-1+i-i|\Leftrightarrow|u-3i|=\sqrt{25}\Leftrightarrow|u-3i|=5.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των u είναι κύκλος με κέντρο το Κ (0,3) και ακτίνα ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $h'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$h''(x)=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, και η h' γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Η h είναι γνησίως αύξουσα και η h' είναι γνησίως φθίνουσα από το Γ1.

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$h'(x)<h'(0)\overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow}x>0.$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Θέτουμε $\dfrac{e^x}{e^x+1}=u$. Τότε $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln 1=0$.

Επομένως, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right]=1$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)\overset{e^x+1=u}{\underset{u_0=1}{=}}\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(e^x+1)\right]=0$. Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. Η $\phi(x)=e^x\left(h(x)+\ell n2\right)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών

$$\phi(x)=0\Leftrightarrow h(x)+\ell n2=0\Leftrightarrow h(x)=-\ell n2\Leftrightarrow h(x)=h(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$$

$$\phi(x)>0\Leftrightarrow h(x)+\ell n2>0\Leftrightarrow h(x)>-\ell n2\Leftrightarrow h(x)>h(0)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}x>0.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1|\phi(x)|dx=\int_0^1\phi(x)dx=\int_0^1e^x\left(h(x)+\ell n2\right)dx=\left[e^x\left(h(x)+\ell n2\right)\right]_0^1-\int_0^1e^x\cdot h'(x)dx$$

$$=\left[e^x\left(x-\ell n\left(e^x+1\right)+\ell n2\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=e\left(1-\ell n\left(e+1\right)+\ell n2\right)-\left(-\ell n2+\ell n2\right)-\left[\ell n\left(e^x+1\right)\right]_0^1$$

$$=e-e\ell n\left(e+1\right)+e\ell n2-\ell n\left(e+1\right)+\ell n2=e-\left(e+1\right)\ell n\left(e+1\right)+\left(e+1\right)\ell n2=e+\left(e+1\right)\ell n\frac{2}{e+1}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο συνεχών. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}e^x=e^0=1=f(0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\forall x\neq0$ η f παραγωγίζεται ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ όπου $g(x)=xe^x-e^x+1$ και $g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$.

Είναι $g'(x)<0\Leftrightarrow x<0$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow x>0$.

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $g(0)=0$ τότε η $g(x)>0\quad\forall x\neq0$.

Άρα $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}>0\quad\forall x\neq0$. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ γιατί η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ2. **α.** Έστω η συνάρτηση $G(x)=\int_1^x f(u)du$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η G παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με $G'(x)=f(x)$

Για $x>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$

Για $x<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$

$f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά, $G'(x)=f(x)>0$ επομένως η G είναι γνησίως αύξουσα και "1-1" στο $\mathbb{R}$.

$\int_1^{2f'(x)}f(u)du=0\Leftrightarrow G(2f'(x))=0\Leftrightarrow G(2f'(x))=G(1)\overset{"1-1"}{\Leftrightarrow}2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$ όμως

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}e^x=\frac{1}{2}=f'(0).$$

Η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα επομένως "1-1". Άρα $f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$

β. $y(t)=f(x(t))$. Άρα $y'(t)=f'(x(t))x'(t),\quad x'(t)>0$ και $x'(t)=2y'(t)$.

Άρα $\frac{x'(t)}{2}=f'(x(t))x'(t)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=f'(x(t))\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\overset{"1-1"}{\Leftrightarrow}x=0$. Τότε $y=f(0)=1$ άρα το σημείο είναι το Μ (0,1).

Δ3. $g\left(x\right)=\left(xf\left(x\right)+1-e\right)^2\left(x-2\right)^2=\left(e^x-e\right)^2\left(x-2\right)^2$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ η g παραγωγίζεται ως γινόμενο παραγωγίσιμων

$g'\left(x\right)=2\left(e^x-e\right)\cdot e^x\left(x-2\right)^2+2\left(x-2\right)\left(e^x-e\right)^2=2\left(e^x-e\right)\left(x-2\right)\left[e^x\left(x-2\right)+e^x-e\right]=$

$=2\left(e^x-e\right)\left(x-2\right)\left[xe^x-2e^x+e^x-e\right]=2\left(e^x-e\right)\left(x-2\right)\left(xe^x-e^x-e\right)$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow e^x-e=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ή $xe^x-e^x-e=0$.

Αν $h\left(x\right)=xe^x-e^x-e,\quad x>0$, $h'\left(x\right)=xe^x+e^x-e^x=xe^x>0\quad\forall x>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $h\left(1\right)=-e<0$ και $h\left(2\right)=e^2-e>0$ και η h είναι συνεχής στο [1,2], από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(1,2\right)$ τ. ω. $h\left(x_0\right)=0$.

Τότε $\forall x>x_0\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}h\left(x\right)>h\left(x_0\right)\Leftrightarrow h\left(x\right)>0$ και $\forall x<x_0\overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow}h\left(x\right)<h\left(x_0\right)\Leftrightarrow h\left(x\right)<0$.

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$2(e^x-e)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)=xe^x-e^x-e$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και στο $[x_0,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,x_0]$ και στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=1$ και $x_2=2$ και τοπικό μέγιστο στο $x_3=x_0$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ