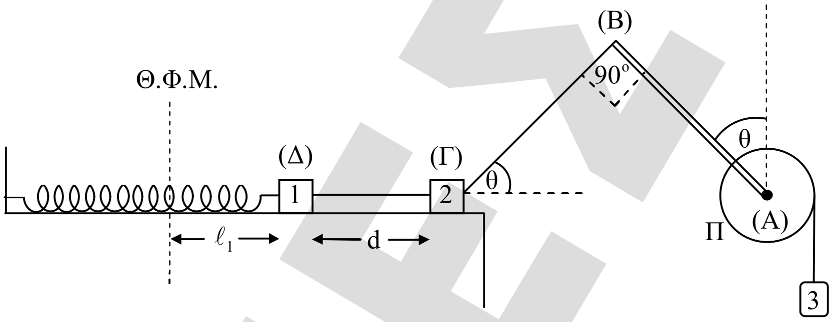
ΑΣΚΗΣΗ



Στέρεο Π αποτελείται από κατακόρυφο αβαρή δίσκο ακτίνας R = 0,2m στο επίπεδο του οποίου είναι κολλημένη λεπτή μη ομογενής ράβδος ΑΒ μάζας Μ = 3kg και μήκους ℓ = 1m. Το άκρο Α της ράβδου ταυτίζεται με το κέντρο του δίσκου. Το στερεό Π μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο Α του δίσκου. Σώμα μάζας m_3 = 8kg κρέμεται μέσω κατακόρυφου νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του δίσκου. Το στερεό ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα με τη βοήθεια τεντωμένου νήματος ΒΓ που σχηματίζει ορθή γωνία με τη ράβδο ΑΒ. Το άκρο Γ του νήματος είναι δεμένο σε σώμα μάζας m_2 = 3kg. Τα σώματα με μάζες m_2 και m_1 = 1kg ισορροπούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένα με οριζόντιο τεντωμένο νήμα ΓΔ. Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο σε οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k = 100N/m το οποίο είναι επιμηκυμένο κατά ℓ_1 = 0,02m. Όλα τα νήματα θεωρούνται αβαρή και μη εκτατά.

Δίνονται: g = 10m/s^2, π = 3,14, η γωνία θ του σχήματος $\theta = \frac{\pi}{5}$rad, όπου ημθ = 0,6 και συνθ = 0,8 και η ροπή αδράνειας της ράβδου ΑΒ ως προς τον άξονα περιστροφής της που περνάει από το άκρο της Α, Ι = 2kg·m^2.

α) Να βρεθεί πόσο απέχει το κέντρο βάρους της ράβδου από το άκρο της Α.

Κόβουμε το νήμα ΒΓ οπότε το σύστημα των σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και το στέρεο Π αρχίζει να περιστρέφεται.

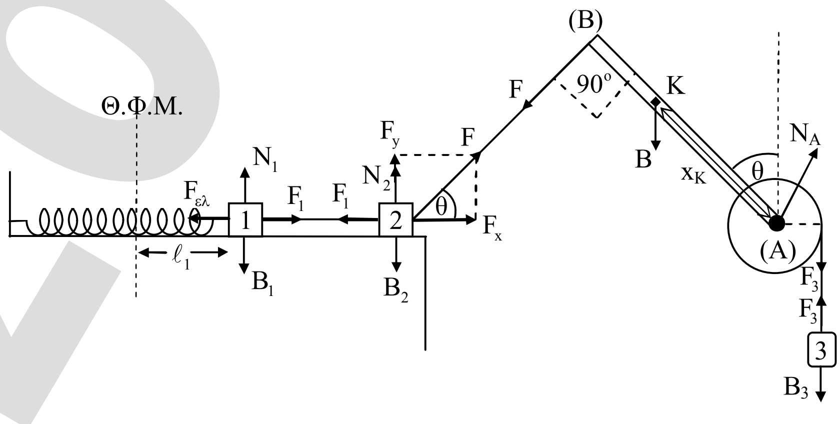
β) Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων m_1 και m_2 τη στιγμή t_0 = 0 που αρχίζει να χαλαρώνει το νήμα ΓΔ.

γ) Αν τα δύο σώματα συγκρούονται σε χρόνο $t_1 = \frac{\pi}{12}$s, μετά τη στιγμή t_0 = 0 που το νήμα αρχίζει να χαλαρώνει, να βρεθεί το μήκος d του αρχικά τεντωμένου νήματος ΓΔ.

δ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του στερεού Π αμέσως μετά τη στιγμή που κόβεται το νήμα ΒΓ.

ε) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_3 όταν η ράβδος ΑΒ γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά.

ΛΥΣΗ



α) Έστω Κ το κέντρο βάρους της ράβδου ΑΒ και ΚΑ = x_K. Οι δυνάμεις που δέχονται όλα τα σώματα του συστήματος φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Ισορροπία m_1: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_{ελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1 = k\cdot\ell_1 \Rightarrow F_1 = 2N.$

Ισορροπία m_2: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_x \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1 = F\cdot συνθ \Rightarrow F = 2,5N.$

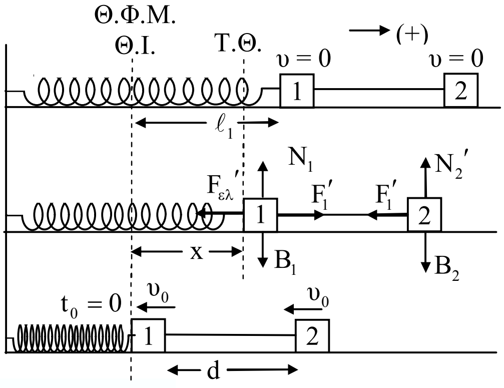
Ισορροπία m_3:

$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_3 = B_3 \Rightarrow F_3 = 80N.$

Στροφική ισορροπία του στερεού Π:

$\Sigma\vec{\tau}_{(A)} = 0 \Rightarrow F\cdot\ell + B\cdot x_K\cdot ημθ = F_3\cdot R \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_K = \frac{F_3\cdot R - F\cdot\ell}{B\cdot ημθ} \Rightarrow x_K = 0,75m.$$



β) Για τη ταλάντωση του συστήματος των m_1 και m_2 ισχύει:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \omega = 5rad/s$ και $A = \ell_1 = 0,02m.$

Για την ταλάντωση του σώματος m_2 ισχύει:

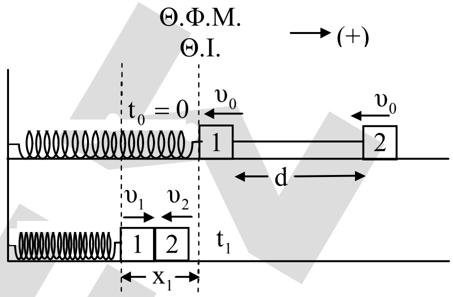
$\Sigma F_{x(2)} = -D_2\cdot x \Rightarrow -F_1' = -m_2\omega^2\cdot x \Rightarrow F_1' = m_2\omega^2 x.$

Το νήμα ΓΔ αρχίζει να χαλαρώνει τη στιγμή που μηδενίζεται η τάση του νήματος δηλαδή όταν $F_1' = 0 \Rightarrow x = 0$. Άρα συμβαίνει στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δηλαδή στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Εκείνη τη στιγμή τα δύο σώματα κινούνται με κοινή μέγιστη ταχύτητα μέτρου:

$υ_o = υ_{max} \Rightarrow υ_o = \omega\cdot A \Rightarrow υ_o = \omega\cdot\ell_1 \Rightarrow υ_o = 0,1m/s.$

γ) Αμέσως μετά το σώμα m_1 αρχίζει να εκτελεί νέα ταλάντωση με:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{rad/s}$ και περίοδο $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{5} \text{s}$.



Για το νέο πλάτος ταλάντωσης του m_1 ισχύει:

$A_1 = \frac{\upsilon_{max(1)}}{\omega_1} \Rightarrow A_1 = \frac{\upsilon_o}{\omega_1} \Rightarrow A_1 = 0,01 \text{m}.$

Θέτουμε σαν $t_0 = 0$, τη στιγμή που το νήμα ΓΔ αρχίζει να χαλαρώνει.

Για τη νέα ταλάντωση ισχύει $t = 0, x = 0, \upsilon < 0$. Άρα $\phi_o = \pi$ rad.

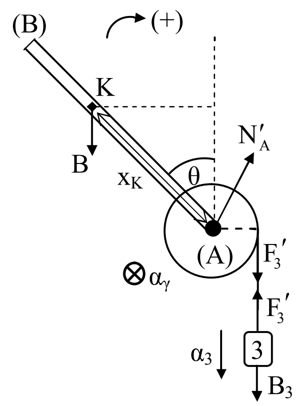
Τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{12} \text{s}$, το σώμα m_1 βρίσκεται στη θέση:

$$x_1 = A_1\, \eta\mu(\omega_1 t_1 + \pi) \Rightarrow x_1 = 0,01 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{12} + \pi\right) \Rightarrow x_1 = -0,01 \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x_1 = -0,005 \text{m}.$$

Στον ίδιο χρόνο το σώμα m_2, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, έχει διανύσει

$d + |x_1| = \upsilon_o t_1 \Rightarrow d = \upsilon_o t_1 - |x_1| \Rightarrow d \cong 0,021 \text{m}.$

δ) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα ΒΓ, στο σύστημα στερεό Π και σώμα m_3 ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα. Αν το σώμα m_3 αποκτά στιγμιαία επιτάχυνση α_3 και το στερεό Π αποκτά στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α_γ, ισχύει: $\alpha_3 = \alpha_\gamma \cdot R$.



Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του στερεού Π:

$$\Sigma\tau_{(A)} = I \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow F_3' \cdot R - B \cdot x_K \cdot \eta\mu\theta = I \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow F_3' - Mg\frac{x_K}{R}\eta\mu\theta = \frac{I}{R} \cdot \alpha_\gamma \quad ①$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση του σώματος m_3:

$$\Sigma F_3 = m_3 \cdot \alpha_3 \Rightarrow B_3 - F_3' = m_3\alpha_3 \Rightarrow m_3 g - F_3' = m_3 \cdot \alpha_\gamma R \quad ②$$

Από ①+② $\Rightarrow m_3 g - Mg\frac{x_K}{R}\eta\mu\theta = \left(\frac{I}{R} + m_3 R\right)\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{m_3 g \cdot R - Mg \cdot x_K \cdot \eta\mu\theta}{\left(I + m_3 R^2\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\gamma \cong 1,078 \text{ rad/s}^2.$

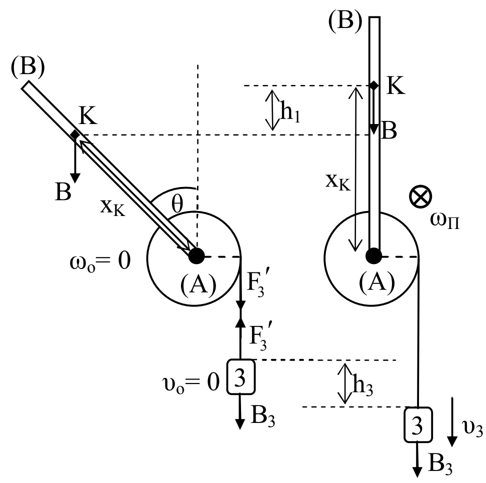
Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του στερεού Π τη στιγμή που κόβεται το νήμα, είναι $\frac{d\omega}{dt} \cong 1,078 \text{ rad/s}^2$.

ε) Όταν η ράβδος ΑΒ γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά το κέντρο βάρους της Κ έχει ανέβει κατά:

$h_1 = x_K - x_K \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow h_1 = x_K(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)$

και το σώμα μάζας m_3 έχει κατέβει κατά $h_3 = R \cdot \theta$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συστήματος στερεό Π και σώμα m_3, από την αρχική θέση (Ι) έως τελική θέση (ΙΙ), όπου το στερεό Π έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω_Π και το σώμα m_3 έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_3 = \omega_\Pi \cdot R$:



(Ι) (ΙΙ)

$$K_{(II)} - K_{(I)} = W_B + W_{B_3} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_\Pi^2 + \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2 = B_3 h_3 - B \cdot h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I \cdot \frac{\upsilon_3^2}{R^2} + \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2 = m_3 g \cdot R \cdot \theta - Mg \cdot x_K(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2\left[\frac{I}{m_3 R^2} + 1\right] = m_3 g \cdot R \cdot \theta - Mg \cdot x_K(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_3 = \frac{m_3 g \cdot R \cdot \theta - Mg \cdot x_K(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)}{\left[\frac{I}{m_3 R^2} + 1\right]} \Rightarrow K_3 \cong 0,765 \text{ J}.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ • ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ
ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ
ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ