ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{4(x^2+1)}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ με τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω να είναι $P(\lambda)=\lambda\nu+\mu$, $\lambda\in\Omega$ και $\nu,\mu\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα Δ_1,Δ_2 όπου η f' είναι γνησίως αύξουσα και να ορίσετε το ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$ όπου $A=\left\{x\in\Omega\cap(\Delta_1\cup\Delta_2)\right\}$.

β. Αν P(A) είναι το τοπικό μέγιστο της f να βρείτε τα ν και μ.
Για τις τιμές των ν και μ που βρήκατε στο ερώτημα **(β)**:

γ. Να βρείτε τα διαστήματα Δ_3,Δ_4 όπου η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία. Έπειτα να βρείτε το ενδεχόμενο $B=\left\{x\in\Omega\cap(\Delta_3\cup\Delta_4)\right\}$ και την πιθανότητα P(B).

δ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{2f''(x)}{x^2+x\sqrt{3}}$.

ε. Αν οι παρατηρήσεις t_i μιας μεταβλητής X είναι οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω, να βρείτε το ελάχιστο $c\in\mathbb{N}$ ώστε οι παρατηρήσεις $y_i=t_i+c$, $i=1,...,6$ να είναι δείγμα ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

α. $f'(x)=\dfrac{(2x-1)\cdot(x^2+1)-(x^2-x+1)\cdot 2x}{4(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2-1}{4(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$ και $f''(x)=\dfrac{2x\cdot(x^2+1)^2-(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{4(x^2+1)^4}=$

$=\dfrac{2x(x^2+1)\cdot\left(x^2+1-2(x^2-1)\right)}{4(x^2+1)^4}=\dfrac{2x(3-x^2)}{4(x^2+1)^3},\ x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2x(3-x^2)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm\sqrt{3}$. Το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+	0	−	
$f'(x)$	↗		↘		↗		↘	
		ΤΜ		ΤΕ		ΤΜ		

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\Delta_1=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$ και $\Delta_2=\left[0,\sqrt{3}\right]$, οπότε $A=\{-2,0,1\}$.

β. $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	
		ΤΜ		ΤΕ		

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$ το $f(-1)=\dfrac{3}{8}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=\dfrac{1}{8}$.

Άρα $P(A)=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow P(-2)+P(0)+P(1)=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow -2\nu+\mu+\mu+\nu+\mu=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow 3\mu-\nu=\dfrac{3}{8}$ (1).

Ακόμη ισχύει, $P(-2)+P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=1\Leftrightarrow \dfrac{3}{8}-\nu+\mu+2\nu+\mu+3\nu+\mu=1\Leftrightarrow 3\mu+4\nu=\dfrac{5}{8}$ (2).

Από το σύστημα των (1) και (2) προκύπτει, $\nu=\dfrac{1}{20}$ και $\mu=\dfrac{17}{120}$.

γ. Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον $x'x$ τότε $\varepsilon\varphi\omega = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \omega < 90^o$ οπότε $\varepsilon\varphi\omega > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$. Επομένως $\Delta_3 = (-\infty, -1)$, $\Delta_4 = (1, +\infty)$ και $B = \{-2, 2, 3\}$.

Άρα $P(B) = P(-2) + P(2) + P(3) = -2\nu + \mu + 2\nu + \mu + 3\nu + \mu = 3(\nu + \mu) = 3\left(\frac{1}{20} + \frac{17}{120}\right) = 3 \cdot \frac{23}{120} = \frac{23}{40}$.

δ. Είναι $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \frac{2f''(x)}{x^2 + x\sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \frac{2 \cdot 2x(3 - x^2)}{x\left(x + \sqrt{3}\right) \cdot 4(x^2+1)^3} = \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \frac{\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right)}{(x^2+1)^3\left(x + \sqrt{3}\right)} = \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} - x}{(x^2+1)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{4^3} = \frac{\sqrt{3}}{32}$.

ε. Οι παρατηρήσεις t_i είναι:

$t_1 = P(-1) = \frac{5}{120}$, $t_2 = P(-2) = \frac{14}{120}$, $t_3 = P(0) = \frac{17}{120}$, $t_4 = P(1) = \frac{23}{120}$, $t_5 = P(2) = \frac{24}{120}$, $t_6 = P(3) = \frac{35}{120}$

και έχουν μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} t_i = \frac{1}{6}$, διασπορά $s_x^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(t_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{15}{120}\right)^2 + 2\left(\frac{9}{120}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{120}\right)^2\right] =$

$= \frac{1}{6} \cdot 2\frac{3^2}{120^2} \cdot (5^2 + 9 + 1) = \frac{105}{120^2}$, οπότε η τυπική απόκλιση τους είναι $s_x = \sqrt{s_x^2} = \frac{\sqrt{105}}{120}$.

Οι παρατηρήσεις $y_i = t_i + c$ έχουν τυπική απόκλιση $s_y = s_x$, μέση τιμή $\bar{y} = \bar{x} + c$ και συντελεστή μεταβλητότητας

$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\frac{\sqrt{105}}{120}}{\frac{1}{6} + c} = \frac{\sqrt{105}}{20 + 120c}$. Το δείγμα των παρατηρήσεων y_i θα είναι ομοιογενές αν:

$CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{105}}{20 + 120c} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \sqrt{105} \le 2 + 12c \Leftrightarrow c \ge \frac{\sqrt{105} - 2}{12}$. Όμως $0 < \frac{\sqrt{105} - 2}{12} < 1$ άρα $c = 1$.

ΆΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \left\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu\right\}$ ενός πειράματος τύχης ώστε τα α_i, $i = 1, ..., \nu$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = \frac{1}{\nu^2}$, διαφορά $\omega = \frac{2}{\nu^2}$ και οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω είναι $P(\alpha_i) = \alpha_i$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3\alpha^2x^2 + 7\alpha x - 3,\ x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Αν η μέση τιμή των α_i είναι $\frac{1}{10}$ να βρείτε το ν και τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω.

β. Να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(P(\Omega), 2)$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ. Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα **(β)**:

i. Να βρείτε τα στοιχεία των ενδεχομένων $A = \left\{\alpha_i \in \Omega \,/\, \text{ο ρυθμος μεταβολής της } f' \text{ στο } x_o = 2 \text{ ειναι} \ge 100 \cdot \alpha_i + 39\right\}$,

$B = \left\{\alpha_i \in \Omega \,/\, \lim\limits_{x \to 1}\frac{f'(x)}{(x-1)^2} < 100\alpha_i + 11 \le f''(2) - 22\right\}$ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(A), P(B),\ P(A \cup B), P(A \cup B')$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}P(\alpha_i) = \frac{1}{\nu} \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 10$, ακόμη $\alpha_i = \alpha_1 + (i-1) \cdot \omega = \frac{1}{100} + (i-1)\frac{2}{100} = \frac{2i-1}{100}$.

Άρα: $\Omega = \left\{\frac{1}{100}, \frac{3}{100}, \frac{5}{100}, \frac{7}{100}, \frac{9}{100}, \frac{11}{100}, \frac{13}{100}, \frac{15}{100}, \frac{17}{100}, \frac{19}{100}\right\}$,

$P(\frac{1}{100}) = \frac{1}{100}$, $P(\frac{3}{100}) = \frac{3}{100}$, $P(\frac{5}{100}) = \frac{5}{100}$, $P(\frac{7}{100}) = \frac{7}{100}$, $P(\frac{9}{100}) = \frac{9}{100}$, $P(\frac{11}{100}) = \frac{11}{100}$, $P(\frac{13}{100}) = \frac{13}{100}$, $P(\frac{15}{100}) = \frac{15}{100}$,

$P(\frac{17}{100}) = \frac{17}{100}$, $P(\frac{19}{100}) = \frac{19}{100}$. Ακόμη, $\sum_{i=1}^{10} P(\alpha_i) = \frac{1}{100} + \frac{3}{100} + ... + \frac{19}{100} = 1$

β. $P(\Omega) = 1$, άρα $M(1, 2) \in C_f$.

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha^2 - 7\alpha = 10 \\ -3\alpha^2 + 7\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha^2 - 7\alpha = 10 \\ -6\alpha^2 + 14\alpha = 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 7\alpha = 14 \Leftrightarrow \alpha = 2 .$$

γ. Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 3,\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14$ και $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$.

i. Ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$ στο $x_0 = 2$ είναι $f''(2) = 12 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 24 = 48$.

Συνεπώς, $48 \geq 100\alpha_i + 39 \Leftrightarrow \frac{48}{100} - \frac{39}{100} \geq \alpha_i \Leftrightarrow \alpha_i \leq \frac{9}{100}$. Άρα $A = \left\{\frac{1}{100}, \frac{3}{100}, \frac{5}{100}, \frac{7}{100}, \frac{9}{100}\right\}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3 + 6x^2 - 24x + 14}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(4x^2 + 10x - 14)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)(4x+14)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}(4x+14) = 18 .$$

Άρα $18 < 100\alpha_i + 11 \leq f''(2) - 22 \Leftrightarrow 18 < 100\alpha_i + 11 \leq 26 \Leftrightarrow \frac{7}{100} < \alpha_i \leq \frac{15}{100}$. Έτσι $B = \left\{\frac{9}{100}, \frac{11}{100}, \frac{13}{100}, \frac{15}{100}\right\}$.

Είναι $A \cap B = \left\{\frac{9}{100}\right\} \neq \varnothing$ άρα τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii. Είναι $P(A) = P(\frac{1}{100}) + P(\frac{3}{100}) + P(\frac{5}{100}) + P(\frac{7}{100}) + P(\frac{9}{100}) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

και $P(B) = P(\frac{9}{100}) + P(\frac{11}{100}) + P(\frac{13}{100}) + P(\frac{15}{100}) = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$.

Ακόμη $A \cup B = \Omega - \left\{\frac{17}{100}, \frac{19}{100}\right\}$ άρα $P(A \cup B) = 1 - P(\frac{17}{100}) - P(\frac{19}{100}) = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

Είναι $A = \left\{\frac{1}{100}, \frac{3}{100}, \frac{5}{100}, \frac{7}{100}, \frac{9}{100}\right\}$ και $B' = \left\{\frac{1}{100}, \frac{3}{100}, \frac{5}{100}, \frac{7}{100}, \frac{17}{100}, \frac{19}{100}\right\}$,

άρα $A \cup B' = \left\{\frac{1}{100}, \frac{3}{100}, \frac{5}{100}, \frac{7}{100}, \frac{9}{100}, \frac{17}{100}, \frac{19}{100}\right\}$.

$P(A \cup B') = P(\frac{1}{100}) + P(\frac{3}{100}) + P(\frac{5}{100}) + P(\frac{7}{100}) + P(\frac{9}{100}) + P(\frac{17}{100}) + P(\frac{19}{100}) = \frac{61}{100}$.

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ