

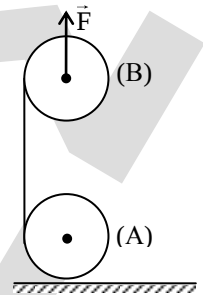
ΑΣΚΗΣΗ

Δύο όμοιες ομογενείς αρχικά ακίνητες τροχαλίες Α και Β ίδιας μάζας $M = 2\text{kg}$ και ίδιας ακτίνας $R = 0,4\text{m}$ συνδέονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, με αβαρές μη έκτατο νήμα το οποίο είναι τυλιγμένο πολλές φορές στην περιφέρειά τους.

- A.** Ασκώντας τη στιγμή $t = 0$ στον άξονα της τροχαλίας Β κατακόρυφη δύναμη F προς τα πάνω παρατηρούμε ότι η τροχαλία Α περιστρέφεται ελάχιστα πάνω από το έδαφος με το κέντρο μάζας της να διατηρείται ακίνητο. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F .
- B.** Όταν υπό την επίδραση της δύναμης F το κέντρο μάζας της τροχαλίας Β έχει ανέβει κατά ύψος $h = 0,8\text{m}$ κόβουμε το νήμα.
- Η δύναμη F αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος (θέση $x = 0$), αρχίζει να μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $F = 120 - 6x$ (S.I.) έως ότου μηδενιστεί. Να βρεθεί το ύψος από την αρχική του θέση, στο οποίο θα φτάσει το κέντρο μάζας της τροχαλίας Β.
 - Η τροχαλία Α αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος ($t'_0 = 0$), χωρίς να αναπηδήσει, έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο έδαφος με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Να υπολογιστεί η συνολική θερμότητα που απελευθερώνεται κατά την κίνηση της τροχαλίας Α στο έδαφος.
 - Να γίνει σε κοινό διάγραμμα η περιστροφική και η μεταφορική κινητική ενέργεια της τροχαλίας Α κατά την κίνησή της στο έδαφος σε συνάρτηση με το χρόνο, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος ($t'_0 = 0$).

Θεωρείστε ότι όσο οι τροχαλίες συνδέονται με το νήμα οι άξονες περιστροφής τους είναι διαρκώς οριζόντιοι και παράλληλοι μεταξύ τους, το νήμα δεν ολισθαίνει στα αυλάκια και είναι διαρκώς τεντωμένο και κατακόρυφο.

Δίνονται η ροπή αδράνειας κάθε τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$.



ΛΥΣΗ

A. Για την τροχαλία Α:

$$a_{1,cm} = 0 \Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 - w = 0 \Rightarrow T_1 = Mg \Rightarrow T_1 = 20\text{N}.$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη έκτατο $T_1 = T_2 = 20\text{N}$.

$$\Sigma \tau_{(K)} = I \cdot \alpha_{1,\gamma} \Rightarrow T_1 \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_{1,\gamma} \Rightarrow \alpha_{1,\gamma} = \frac{2T_1}{MR} \Rightarrow \alpha_{1,\gamma} = 50\text{rad/s}^2.$$

Το σημείο Μ έχει στιγμιαία κατακόρυφη ταχύτητα $v_M = \omega_1 R$ (1)

Για την τροχαλία Β:

$$\Sigma \tau_{(\Lambda)} = I \cdot \alpha_{2,\gamma} \Rightarrow T_2 \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \alpha_{2,\gamma} \Rightarrow \alpha_{2,\gamma} = 50\text{rad/s}^2.$$

Άρα κάθε χρονική στιγμή για τις τροχαλίες ισχύει $\alpha_{2,\gamma} = \alpha_{1,\gamma} = \alpha_\gamma$ και $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Το σημείο Ν έχει στιγμιαία κατακόρυφη ταχύτητα $v_N = v_\Lambda - \omega_2 R$ (2)

Όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια στιγμιαία ταχύτητα οπότε:

$$v_N = v_M \xrightarrow{(1)} v_\Lambda - \omega R = \omega R \Rightarrow v_\Lambda = 2\omega R \Rightarrow \frac{dv_\Lambda}{dt} = \frac{d(2\omega R)}{dt} \Rightarrow \alpha_\Lambda = 2R \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\Lambda = 40\text{m/s}^2.$$

Για τη μεταφορική κίνηση της τροχαλίας Β ισχύει:

$$\Sigma F_\Lambda = M \cdot \alpha_\Lambda \Rightarrow F - T_2 - w = M \cdot \alpha_\Lambda \Rightarrow F = T_2 + Mg + M \cdot \alpha_\Lambda \Rightarrow F = 120\text{N}.$$

- B. i)** Έστω t η χρονική στιγμή που η τροχαλία (Β) έχει ανέβει κατά ύψος h . Τότε: $h = \frac{1}{2}\alpha_\Lambda t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha_\Lambda}} = 0,2\text{s}.$

Εκείνη τη στιγμή η τροχαλία (Β) έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = \alpha_\gamma \cdot t \Rightarrow \omega = 10\text{rad/s}$ και μεταφορική ταχύτητα

$$v_{cm} = \alpha_\Lambda \cdot t \Rightarrow v_{cm} = 8\text{m/s}.$$

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της τροχαλίας Β, μεταξύ της παραπάνω θέσης και του ανώτερου σημείου που φτάνει το κέντρο μάζας της (όπου $v_{cm} = 0$), έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W_F \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_{\text{τελ}}^2 - \left(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \right) = W_F + W_w \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 = W_F - Mgh' \quad (3)$$

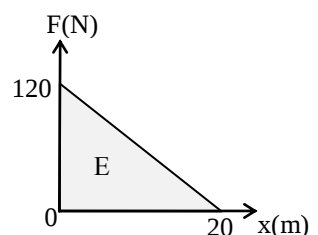
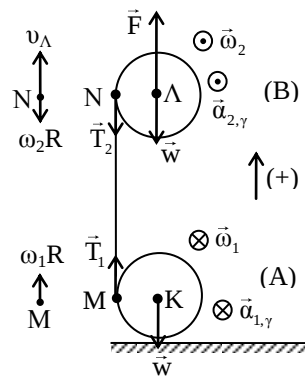
όπου h' η επιπλέον κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας της τροχαλίας Β.

Επειδή οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία δεν δημιουργούν ροπή, η γωνιακή της ταχύτητα δεν μεταβάλλεται. Άρα: $\omega_{\text{τελ}} = \omega = 10\text{rad/s}$.

Για τη μεταβλητή δύναμη $F = 120 - 6x$ (S.I.) έχουμε:

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow F = 120\text{N} \text{ και για } F = 0 \Rightarrow 120 - 6x = 0 \Rightarrow x = 20\text{m}.$$

Το έργο της μεταβλητής δύναμης F είναι: $W_F = E \Rightarrow W_F = 1200\text{J}.$

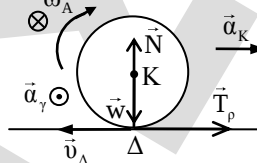


$$\text{Οπότε: } (3) \Rightarrow -\frac{1}{2} M \cdot v_{\text{cm}}^2 = W_F - Mgh' \Rightarrow h' = 63,2\text{m}.$$

$$\text{Αρα } h_{\text{ολ}} = h + h' = 64\text{m}.$$

- ii) Τη χρονική στιγμή $t'_0 = 0$ που κόβεται το νήμα οι δύο τροχαλίες είχαν ίσου μέτρου γωνιακή ταχύτητα $\omega_A = \omega_B = 10\text{rad/s}$.

Εκείνη τη στιγμή η μεταφορική ταχύτητα της τροχαλίας A είναι μηδέν και το κατώτερο σημείο Δ της τροχαλίας έχει οριζόντια ταχύτητα $v_\Delta = \omega_A R \Rightarrow v_\Delta = 4\text{m/s}$ προς τα αριστερά με συνέπεια η τροχαλία να ολισθαίνει, οπότε δέχεται τριβή ολίσθησης $\vec{T}_\rho$ με φορά προς τα δεξιά.



$$\text{Έτσι το κέντρο μάζας της K θα αποκτήσει επιτάχυνση } \vec{a}_K = \frac{\Sigma \vec{F}_x}{M} \Rightarrow a_K = \frac{T_\rho}{M} = \frac{\mu \cdot N}{M} \quad (4)$$

$$\text{Επειδή η τροχαλία δεν αναπηδά } \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = w \Rightarrow N = M \cdot g \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow a_K = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{M} \Rightarrow a_K = \mu \cdot g \Rightarrow a_K = 2\text{m/s}^2.$$

Συγχρόνως η τροχαλία λόγω της ροπής της $\vec{T}_\rho$ θα επιβραδύνεται περιστροφικά με γωνιακή επιβράδυνση

$$\text{μέτρον: } \alpha_\gamma = \frac{\tau_{T_\rho}}{I} = \frac{T_\rho \cdot R}{\frac{1}{2} MR^2} = \frac{2T_\rho}{MR} = \frac{2\mu \cdot N}{MR} = \frac{2\mu \cdot Mg}{MR} = \frac{2\mu \cdot g}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 10\text{rad/s}^2.$$

Όταν η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της τροχαλίας μηδενιστεί, δηλαδή τη στιγμή που το μέτρο v_K της ταχύτητας του κέντρου μάζας K γίνει η ίση με το μέτρο v_e της επιτρόχιας ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, η τριβή μηδενίζεται οπότε αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση και δεν παρατηρείται επιπλέον παραγωγή θερμότητας.

$$\text{Έστω } t' \text{ η χρονική στιγμή που } v_K = v_e \Rightarrow a_K \cdot t' = \omega' \cdot R \Rightarrow a_K \cdot t' = (\omega_0 - \alpha_\gamma \cdot t')R \Rightarrow t' = \frac{\omega_0 R}{a_K + \alpha_\gamma \cdot R}$$

$$\text{με } \omega_0 = \omega_A = 10\text{rad/s. Τότε } t' = \frac{2}{3}\text{s}.$$

$$\text{Εκείνη τη χρονική στιγμή } v_K = a_K t' \Rightarrow v_K = \frac{4}{3}\text{m/s και } \omega' = \omega_0 - \alpha_\gamma \cdot t' \Rightarrow \omega' = \frac{10}{3}\text{rad/s}.$$

Η παραγόμενη από την τριβή θερμότητα ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας της τροχαλίας μεταξύ της στιγμής $t'_0 = 0$ και της στιγμής $t' = \frac{2}{3}\text{s}$. Δηλαδή

$$Q = E(t'_0) - E(t') = \frac{1}{2} I \omega_0^2 - \frac{1}{2} I \omega'^2 + \frac{1}{2} M v_K^2 \Rightarrow Q = \frac{16}{3}\text{J}.$$

- iii) Μετά το κόψιμο του νήματος η κινητική ενέργεια της τροχαλίας λόγω της περιστροφικής της κίνησης, μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$K_\Pi = \frac{1}{2} I \omega'^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \omega_0^2 - \alpha_\gamma \cdot t'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_\Pi = 8(1-t')^2 \text{ (S.I.) για } t \leq \frac{2}{3}\text{s}.$$

Η κινητική ενέργεια της τροχαλίας λόγω της μεταφορικής της κίνησης, μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$K_M = \frac{1}{2} M v_K^2 = \frac{1}{2} M (a_K t')^2 \Rightarrow K_M = 4t'^2 \text{ (S.I.) για } t \leq \frac{2}{3}\text{s}.$$

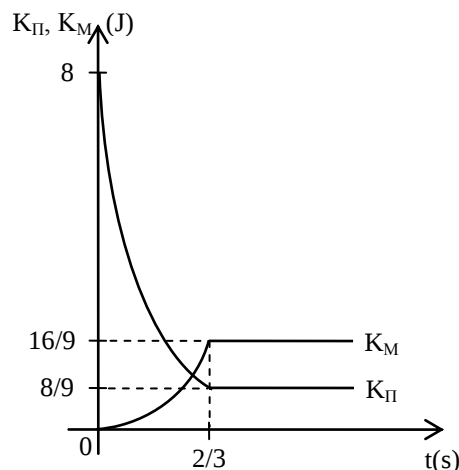
$$\text{Για } t = 0 \Rightarrow K_\Pi = 8\text{J και } K_M = 0$$

$$\text{Για } t = \frac{2}{3}\text{s} \Rightarrow K_\Pi = \frac{8}{9}\text{J και } K_M = \frac{16}{9}\text{J}.$$

Για $t > \frac{2}{3}\text{s}$ η τροχαλία εκτελεί ομαλή μεταφορική και ομαλή

περιστροφική κίνηση, με σταθερές κινητικές ενέργειες.

Τα διαγράμματα των δύο ενεργειών σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ANNA
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ