

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το a έως το β ; **Μονάδες 6**

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής. (Μον. 2)

β) Εάν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(Μον. 2)

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(Μον. 2)

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^\beta e^x dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

(Μον. 2)

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$ (Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_a^\beta \eta \mu x \, dx = \dots$

(Μον. 3)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c μία σταθερά, τότε:

$(c \cdot f)'(x) = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε:

$(x^\alpha)' = \dots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €):

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$v = \dots$	100	

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μισθών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 €;

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x^2 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 6x - 24$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ: 234

Α2. α. $\succ \Sigma$ β. $\succ \Sigma$ γ. $\succ \Lambda$ δ. $\succ \Lambda$ ε. $\succ \Sigma$

Α3. α) $\int_a^b \eta \mu x dx = -[\sigma \nu x]_a^b = -(\sigma \nu \beta - \sigma \nu \alpha) = -\sigma \nu \beta + \sigma \nu \alpha$
β) $(c \cdot f')(x) = c \cdot f'(x)$
γ) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2$

Β2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-2^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x+3}+2) = \sqrt{1+3}+2 = 4$

Β3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ με $f(1) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2$. Άρα $\alpha^2 = 4$ επομένως $\alpha = 2$ ή $\alpha = -2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει ότι $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Άρα $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{25}{50} = 0,50$ ομοίως $f_2 = 0,34$, $f_3 = 0,12$ και $f_4 = 0,04$. Οπότε ο πίνακας είναι:

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$	$x_i v_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	$v = 50$	100	450

Γ2. Η ζητούμενη μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = \frac{450}{50} = 9$.

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν μισθό το πολύ 1000€ (10 εκατοντάδες) είναι $50\% + 34\% = 84\%$.

Γ4. Η διακύμανση δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{(6-9)^2 \cdot 25 + (10-9)^2 \cdot 17 + (15-9)^2 \cdot 6 + (20-9)^2 \cdot 2}{50} = \frac{225 + 17 + 216 + 242}{50} = \frac{700}{50} = 14.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η παράγωγος της f είναι

$$f'(x) = [(x-2)^2(x+\alpha)]' = [(x-2)^2]'(x+\alpha) + (x-2)^2(x+\alpha)' = 2(x-2)(x-2)'(x+\alpha) + (x-2)^2 = 2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)(3x+2\alpha-2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$, άρα από θεώρημα Fermat

$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow (4-2)(3 \cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (10 + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 20 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$$

Δ3. Για $\alpha = -5$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = (x-2)^2(x-5), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{με } f'(x) = (x-2) \cdot (3x-12), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (3x-12) = 0 \text{ άρα } x = 2, \quad x = 4.$$

Πίνακας προσήμου της $f'(x)$:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	τ.μ	τ.ε.	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και στο $[4, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, 4]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$ με τιμή $f(2) = 0$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 4$ με τιμή $f(4) = -4$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - h(x) = 3x^2 - 12x - 6x + 24$ δηλαδή $\varphi(x) = 3x^2 - 18x + 24$, $x \in \mathbb{R}$. Η $\varphi(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ για $y = 0$: $3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$. Βρίσκουμε τη διακρίνουσα $\Delta = 4 > 0$ άρα $x_1 = 4$, $x_2 = 2$
Πρόσημο της $\varphi(x)$:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$\varphi(x)$	+	0	0	+

$$\text{Επομένως } E(\Omega) = \int_2^4 |\varphi(x)| dx = -\int_2^4 \varphi(x) dx = -\int_2^4 (3x^2 - 18x + 24) dx = -\left[x^3 - 9x^2 + 24x\right]_2^4 = -(4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4) + (2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2) = 4 \text{ τ.μ.}$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΥΡΟΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ •
ΣΠΛΗΝΗΣ ΝΙΚΟΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ