

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται δείγμα n θετικών παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ μιας μεταβλητής X , οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή. Το δείγμα έχει συντελεστή μεταβλητότητας 20% και ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 16 \left(\sum_{i=1}^n x_i + 6n \right)$.

α. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής.

β. Αν επιπλέον ισχύει ότι $n=1600$:

i. να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{1600} (x_i^2 - 40x_i + 400)$.

ii. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \bar{x}x^2 + 14Rx + 2013$. Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις της μεταβλητής X βρίσκονται στο διάστημα (M, μ) όπου μ, M οι θέσεις τοπικού ελαχίστου και μεγίστου της f αντίστοιχα.

$$\text{Δίνεται ότι } s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\}.$$

ΛΥΣΗ

$$\text{α. Είναι } CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = 5s. \text{ Επίσης για τη διακύμανση ισχύει: } s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n^2} \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 + (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}.$$

$$\text{Διαιρώντας με } n, \text{ η δοσμένη σχέση γίνεται: } \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = 16 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + 96 \Leftrightarrow s^2 + (\bar{x})^2 = 16\bar{x} + 96 \Leftrightarrow s^2 + 25s^2 = 80s + 96 \Leftrightarrow$$

$26s^2 - 80s - 96 = 0 \Leftrightarrow s = 4$. Άρα $\bar{x} = 20$. Στην κανονική κατανομή η μέση τιμή είναι μικρότερη και μεγαλύτερη από το 50% των παρατηρήσεων που είναι ιδιότητα της διαμέσου. Άρα ισχύει ότι $\delta = \bar{x} = 20$ και $R = 6s = 24$.

$$\text{β. i. Για τη διακύμανση ισχύει επίσης ότι: } s^2 = \frac{1}{1600} \sum_{i=1}^{1600} (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{1600} (x_i - 20)^2 = 16 \cdot 1600 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{1600} (x_i^2 - 40x_i + 400) = 25600$$

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \bar{x}x^2 + 14Rx + 2013$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και γίνεται

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 20x^2 + 336x + 2013. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^2 - 40x + 336. \text{ Έχουμε:}$$

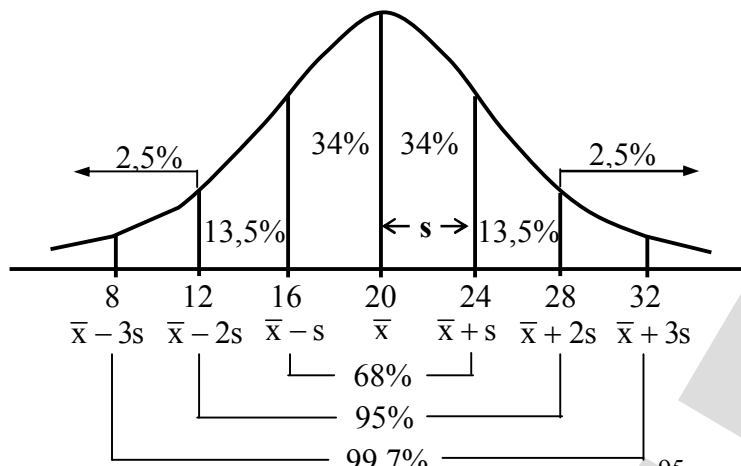
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 336 = 0 \Leftrightarrow x = 12 \quad \text{ή} \quad x = 28$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 336 > 0 \Leftrightarrow x < 12 \quad \text{ή} \quad x > 28$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	12	28	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Άρα η f παρουσιάζει στο $\mu = 28$ τοπικό ελάχιστο και στο $M = 12$ τοπικό μέγιστο. Οι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής φαίνονται στο σχήμα



Επομένως στο διάστημα (12,28) βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων δηλαδή $\frac{95}{100} \cdot 1600 = 1520$ παρατηρήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Αν κ, λ τα αποτελέσματα των ρίψεων τότε να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^6 - 6x + \kappa\lambda = 0$ να μην έχει πραγματική ρίζα.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^6 - 6x + \kappa\lambda$, $x \in \mathbb{R}$. η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνμική με $f'(x) = 6x^5 - 6$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

O.E.

Άρα $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $f(1) > 0 \Leftrightarrow -5 + \kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda < 5$ ①.

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα. Αν A το ενδεχόμενο η εξίσωση να μην έχει πραγματικές ρίζες τότε $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$. Τελικά

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος με ισοπίθανα αποτελέσματα και $N(\Omega) = v$ όπου v πρώτος αριθμός.

Αν A ένα απλό ενδεχόμενο του Ω τότε:

- Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε σύνθετα ενδεχόμενα B, Γ του Ω ισχύει $P(A) \neq P(B) \cdot P(\Gamma)$
- Αν $P(A) = P(B) \cdot P(\Gamma)$ για κάποια ενδεχόμενα B, Γ του Ω με Γ σύνθετο και το εύρος των παρατηρήσεων $[P(B)]^{2013}, P(\Gamma), \ell n P(B), P(B)$ είναι $1 + \ell n 2011$ να βρείτε το v .

ΛΥΣΗ

- Έστω ότι υπάρχουν σύνθετα ενδεχόμενα B, Γ το Ω με $N(B) = \kappa, N(\Gamma) = \lambda$ τέτοια ώστε: $P(A) = P(B) \cdot P(\Gamma)$ ①. Το A

$$\text{είναι απλό ενδεχόμενο του } \Omega \text{ άρα } P(A) = \frac{1}{v}. \text{ ①} \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{\kappa}{v} \cdot \frac{\lambda}{v} \Leftrightarrow \kappa \cdot \lambda = v$$

Άρα κ, λ διαιρέτες του v με $\kappa, \lambda \geq 2$ αφού B, Γ σύνθετα ενδεχόμενα. Άτοπο διότι v πρώτος. Συνεπώς $P(A) \neq P(B) \cdot P(\Gamma)$.

- Έστω $N(B) = \kappa$ και $N(\Gamma) = \lambda$ με $\lambda \geq 2$. Όμοια με (i.) προκύπτει κ, λ διαιρέτες του v . Άρα $\kappa = 1, \lambda = v$

δηλαδή $P(B) = \frac{1}{v}$ και $P(\Gamma) = 1$. Ακόμη $\ell n P(B) < 0 < [P(B)]^{2013} < P(B) < P(\Gamma)$ διότι $0 < P(B) < 1$.

$$\text{Οπότε } R = 1 + \ell n 2011 \Leftrightarrow P(\Gamma) - \ell n P(B) = 1 + \ell n 2011 \Leftrightarrow \ell n v = \ell n 2011 \Leftrightarrow v = 2011.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ