

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{15x^2}{2} - 11x + \ln x}$, $x > 0$, σημείο $A(x, f(x))$ και B, Γ οι προβολές του A στους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα. Έστω επίσης η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ και ο δειγματικός χώρος Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα που είναι οι τετμημένες των σημείων $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, v$ της (ε) .

1. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , του ορθογωνίου $OBA\Gamma$ συναρτήσει του x .
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $E(x)$.
3. Αν A, B δύο ενδεχόμενα του Ω και $P(A), P(A-B)$ οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της $E(x)$ και το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου $A \cap B$ είναι 135 τότε :

(i) να βρείτε το πλήθος των στοιχείων v του Ω

(ii) να βρείτε την πιθανότητα να μη συμβεί το B , αν η πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από τα A, B είναι $\frac{8}{15}$.

(iii) αν η μέση τιμή των τετμημένων των σημείων M_i είναι $\bar{x} = \frac{e^{7/2}}{5}$ και $\sum_{i=1}^v \left(x_i - \frac{e^{7/2}}{5}\right)^2 = e^7$ να δείξετε ότι το δείγμα των τεταγμένων y_i δεν είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{15x^2}{2} - 11x + \ln x}$ έχει παράγωγο $f'(x) = e^{\frac{15x^2}{2} - 11x + \ln x} \left(15x - 11 + \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$.

Είναι $B(x, 0)$, $\Gamma(0, f(x))$, με $x > 0$, οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου $OBA\Gamma$ είναι $E(x) = (OB) \cdot (O\Gamma) = x \cdot f(x) > 0$. Ο ρυθμός μεταβολής του $E(x)$ ως προς x είναι :

$$E'(x) = (x \cdot f(x))' = f(x) + xf'(x) = e^{\frac{15x^2}{2} - 11x + \ln x} \cdot (15x^2 - 11x + 2)$$

2. $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}$ ή $x_2 = \frac{2}{5}$, αφού $e^{\frac{15x^2}{2} - 11x + \ln x} > 0$, για κάθε $x > 0$, οπότε:

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
E'		+	0	-
E			0	+
		T.M	T.E	
		$E\left(\frac{1}{3}\right)$	$E\left(\frac{2}{5}\right)$	

Άρα η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ και για κάθε $x \in \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα για

κάθε $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$. Η $E(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{3}$ το $E\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{-17/6}}{9}$ και τοπικό ελάχιστο στο

$$x_2 = \frac{2}{5} \text{ το } E\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4 \cdot e^{-16/5}}{25}$$

3. (i) Επειδή ισχύει $A - B \subseteq A$ έχουμε $P(A - B) \leq P(A)$ άρα $P(A - B) = \frac{1}{3}$ και $P(A) = \frac{2}{5}$

$$\text{Οπότε } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{5} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{135}{v} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow v = 2025$$

- (ii) Είναι $P((A \cup B)') = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{8}{15} \Leftrightarrow P(B') - P(A - B) = \frac{8}{15}$

$$P(B') = \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B') = \frac{13}{15}$$

- (iii) Είναι $f(1) = e^{\frac{15}{2} - 11} = e^{-\frac{7}{2}}$ και $f'(1) = 5 \cdot e^{-\frac{7}{2}}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι :

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

$(\varepsilon): y = f'(1)x + \beta$ και διέρχεται από το $M(1, f(1))$ άρα: $f(1) = f'(1) \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow e^{-\frac{7}{2}} = 5 \cdot e^{-\frac{7}{2}} + \beta \Leftrightarrow \beta = -4e^{-\frac{7}{2}}$.

Άρα $(\varepsilon): y = 5e^{-\frac{7}{2}}x - 4e^{-\frac{7}{2}}$.

Για $n = 2025$ η μέση τιμή των τετμημένων των σημείων $M_i(x_i, y_i)$ με $i=1, \dots, 2025$ της εφαπτομένης (ε) είναι

$\bar{x} = \frac{e^{7/2}}{5}$ (1). Επίσης για την διασπορά s_x^2 των τετμημένων ισχύει :

$$s_x^2 = \frac{1}{2025} \sum_{i=1}^{2025} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{2025} \sum_{i=1}^{2025} \left(x_i - \frac{e^{7/2}}{5} \right)^2 = \frac{e^7}{2025} \quad (2).$$

Τα σημεία $M_i(x_i, y_i)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) άρα $y_i = 5 \cdot e^{-\frac{7}{2}} x_i - 4e^{-\frac{7}{2}}$. Επειδή όλες οι τιμές x_i πολλαπλασιάζονται με $5 \cdot e^{-\frac{7}{2}}$ και στη συνέχεια μειώνονται κατά $-4e^{-\frac{7}{2}}$ τότε από εφαρμογή σχολικού βιβλίου η μέση τιμή $\bar{y}$ και η διασπορά s_y^2 , των τεταγμένων y_i , είναι :

$$\bar{y} = 5 \cdot e^{-\frac{7}{2}} \cdot \bar{x} - 4e^{-\frac{7}{2}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \bar{y} = 1 - 4e^{-\frac{7}{2}} \text{ και } s_y^2 = \left(5 \cdot e^{-\frac{7}{2}} \right)^2 s_x^2 \stackrel{(2)}{=} 25e^{-7} \frac{e^7}{2025} = \frac{1}{81}. \text{ Τελικά η τυπική απόκλιση των}$$

$$\text{τεταγμένων είναι } s_y = \frac{1}{9} \text{ και ο συντελεστής μεταβολής } CV = \frac{s}{|\bar{y}|} = \frac{\frac{1}{9}}{\left| 1 - 4e^{-\frac{7}{2}} \right|} = \frac{\frac{1}{9}}{9 \cdot \left(e^{\frac{7}{2}} - 4 \right)}$$

$$\text{Όμως } \frac{e^{\frac{7}{2}}}{9 \cdot \left(e^{\frac{7}{2}} - 4 \right)} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 \cdot e^{\frac{7}{2}} > 9e^{\frac{7}{2}} - 36 \Leftrightarrow e^{\frac{7}{2}} > -36 \text{ αληθές. Άρα } CV > \frac{1}{10}, \text{ οπότε το δείγμα των } y_i \text{ δεν}$$

είναι ομοιογενές.

ΑΣΚΗΣΗ 2

- Να δείξετε ότι $e^x > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Δίνονται οι αριθμοί $e^{P(A)}$, $P(A \cap B)$, $2P(A)$ με A, B , ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(B) \neq 0$ και R, δ το εύρος και η διάμεσος αντίστοιχα των αριθμών, να δείξετε ότι :
 - $R \neq P(A - B)$
 - Αν $R = P(B - A)$ τότε $P(A) = 0$
 - Αν $P(A) = \ln 2$ τότε $R + \frac{\delta}{2} \geq 2$
 - Αν A, B , ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και η διάμεσος δ είναι ίση με την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B τότε $P(A) = P(B)$

ΛΥΣΗ

- Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = e^x - 2x, x \in \mathbb{R}$. Η f έχει παράγωγο $f'(x) = e^x - 2, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		$\emptyset$	+
$f(x)$			

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στο $x_0 = \ln 2$ επομένως $f(x) \geq f(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$

Τελικά $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2x > 0 \Leftrightarrow e^x > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Από Α. ερώτημα έχουμε ότι $e^x > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και $e^{P(A)} > 2P(A)$ (1)

Επίσης ισχύει ότι $A \cap B \subseteq A$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq 2P(A)$.

Τελικά οι αριθμοί κατά αύξουσα σειρά είναι $P(A \cap B) \leq 2P(A) < e^{P(A)}$ με εύρος $R = e^{P(A)} - P(A \cap B)$.

Έστω ότι $R = P(A - B) \Leftrightarrow e^{P(A)} - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow e^{P(A)} = P(A)$ άτοπο από (1)

άρα $R \neq P(A - B)$

ii. Επειδή $P(B) \neq 0$ ισχύει ότι $0 < P(B) \leq 1$.

$$\text{Αν } R = P(B - A) \Leftrightarrow e^{P(A)} - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow e^{P(A)} = P(B) \stackrel{P(B) > 0}{\Leftrightarrow} P(A) = \ln P(B) \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει } P(B) \leq 1 \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln P(B) \leq 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} P(A) \leq 0.$$

Όμως για το ενδεχόμενο A ισχύει ότι $P(A) \geq 0$ άρα $P(A) = 0$

iii. Η διάμεσος των αριθμών, $\delta = 2P(A)$ (3)

Επίσης αν $P(A) = \ln 2$, έχουμε από το εύρος R των αριθμών ότι :

$$R = e^{P(A)} - P(A \cap B) \Leftrightarrow R = e^{\ln 2} - P(A \cap B) \Leftrightarrow R = 2 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 2 - R \quad (4)$$

$$\text{Ισχύει ότι } P(A \cap B) \leq P(A) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 2 - R \leq \frac{\delta}{2} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} R + \frac{\delta}{2} \geq 2$$

iv. Επειδή A, B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα από απλό προσθετικό νόμο έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Η διάμεσος δ είναι ίση με την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B άρα

$$\delta = P(A \cup B) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 2P(A) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A) = P(B).$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ