

ΑΣΚΗΣΗ

Ομογενής λεπτή οριζόντια δοκός ΟΑ μάζας $M_1 = 12 \text{ kg}$ και μήκους $L = 8 \text{ m}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που περνά από το σημείο της Κ και είναι κάθετος σ' αυτή. Το σημείο Κ ισαπέχει από το άκρο Ο και το μέσο Μ της δοκού. Κατακόρυφος τροχός, αποτελείται από δύο κάθετες μεταξύ τους ομογενείς ράβδους μήκους $L_p = 3 \text{ m}$ και μάζας m_p , η κάθε μία και ένα λεπτό ομογενή δακτύλιο μάζας $M_\delta = 2m_p$ ακτίνας $R = 1,5 \text{ m}$, του οποίου όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Ο τροχός αρθρώνεται από το κέντρο μάζας του στο άκρο Α της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ακίνητο σύστημα των δύο στερεών αφήνεται ελεύθερο από την οριζόντια θέση, οπότε αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = 1 \text{ rad/s}^2$ τη χρονική στιγμή που η δοκός έχει διαγράψει γωνία $\varphi = 60^\circ$.



α. Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα Μ του τροχού.

β. Να βρεθεί το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Μ της δοκού, σε συνάρτηση με τη γωνία φ που διαγράφεται από τη δοκό ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Πόση είναι η μέγιστη τιμή της;

γ. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου Μ τη στιγμή που η δοκός έχει διαγράψει γωνία $\varphi = 60^\circ$.

δ. Για ποια τιμή της γωνίας φ , το σύστημα δοκός-τροχός έχει κινητική ενέργεια ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της; Πόσο είναι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής στροφορμής του τροχού ως προς το σημείο Κ, τότε;

Όταν η δοκός ΟΑ βρεθεί στη κατακόρυφη θέση, ο τροχός αποκολλάται ακαριαία τη στιγμή $t_0 = 0$ και συνεχίζει την κίνησή του σε οριζόντιο δάπεδο που εφάπτεται στο κατώτερο σημείο του, ενώ η δοκός συνεχίζει την περιστροφική της κίνηση με τη γωνιακή ταχύτητα που απέκτησε το σύστημα στη κατακόρυφη θέση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δαπέδου και τροχού είναι $\mu = 0,4$.

ε. Να μελετήσετε την κίνηση του τροχού στο οριζόντιο δάπεδο και να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο θα αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

ζ. Να γίνουν σε κοινούς άξονες τα διαγράμματα των αλγεβρικών τιμών της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού και της γραμμικής ταχύτητας του κατώτερου σημείου του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο.

η. Πόση απόσταση διανύει το κέντρο μάζας του τροχού μέχρι ν' αρχίσει η κύλιση; Ποιά απόσταση διανύει ο τροχός μόνο ολισθαίνοντας μέχρι ν' αρχίσει η κύλιση;

θ. Να ελέγξετε αν η δοκός εκτελεί ανακύκλωση μετά την αποκόλληση του τροχού;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους ℓ ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σ' αυτή που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner για τη δοκό ΟΑ:

$$I_{\text{δοκού}(K)} = \frac{1}{12} M_1 L^2 + M_1 \left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow I_{\text{δοκού}(K)} = 112 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ο τροχός δεν δέχεται καμία ροπή ως προς το κέντρο του Α, κατά τη διάρκεια της περιστροφής του συστήματος στο κατακόρυφο επίπεδο, οπότε δεν περιστρέφεται ως προς το κέντρο του Α. Για τη ροπή αδράνειάς του ως προς το σημείο Κ ισχύει:

$$I_{\text{τροχού}(K)} = M \left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του συστήματος τη στιγμή που η δοκός έχει διαγράψει γωνία $\varphi = 60^\circ$:

$$\Sigma \tau_{(K)} = I_{\text{ολ}(K)} \alpha_\gamma \Rightarrow M_1 g d_1 + M g d_2 = (I_{\text{δοκού}(K)} + I_{\text{τροχού}(K)}) \cdot \alpha_\gamma$$

$$\text{με } d_1 = \frac{L}{4} \text{ συν} 60^\circ = 1 \text{ m και } d_2 = \frac{3L}{4} \text{ συν} 60^\circ = 3 \text{ m.}$$

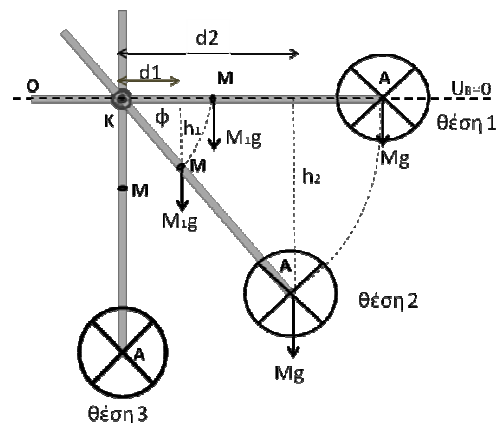
Με συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων προκύπτει: $M = \frac{4}{3} \text{ kg}$.

β. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε για το σύστημα από θέση 1 έως τη θέση 2 όπου η δοκός ΟΑ έχει περιστραφεί κατά τυχαία γωνία φ , ως προς την οριζόντια διεύθυνση:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} I_{\text{ολ}(K)} \omega^2 - M_1 g h_1 - M g h_2 \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{ολ}(K)} \omega^2 = M_1 g \frac{L}{4} \eta \mu \varphi + M g \frac{3L}{4} \eta \mu \varphi \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\eta \mu \varphi} \text{ rad/s.}$$

Η γραμμική ταχύτητα του σημείου Μ της δοκού έχει μέτρο: $v_M = \omega \cdot \frac{L}{4} \Rightarrow v_M = 4\sqrt{\eta \mu \varphi} \text{ m/s.}$

Η μέγιστη ταχύτητα του σημείου Μ επιτυγχάνεται στην κατακόρυφη θέση της δοκού, όπου $\eta \mu \varphi = 1$ και έχει μέτρο $v_{M(\text{max})} = 4 \text{ m/s.}$



- γ. Για το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου M της δοκού OA για γωνία $\varphi = 60^\circ$ ισχύει:

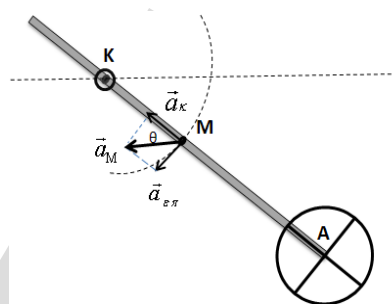
$$v = \omega \cdot R_M \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R_M \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = \alpha_\gamma \cdot \frac{L}{4} \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου M της δοκού OA για γωνία $\varphi = 60^\circ$ ισχύει:

$$\alpha_\kappa = \frac{v^2}{R_M} \Rightarrow \alpha_\kappa = \omega^2 \cdot R_M \Rightarrow \alpha_\kappa = 4\eta\mu\varphi \cdot \frac{L}{4} \Rightarrow \alpha_\kappa = 4\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

Άρα: $\alpha_M = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_{\varepsilon\pi}^2} \Rightarrow \alpha_M = \sqrt{52} \text{ m/s}^2$ και σχηματίζει με τη δοκό γωνία θ

για την οποία ισχύει: $\varepsilon\phi\theta = \frac{\alpha_{\varepsilon\pi}}{\alpha_\kappa} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}.$



- δ. Πρέπει: $K = \frac{K_{\max}}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{\max}^2 \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$, άρα για 1^η φορά $\varphi = 30^\circ$.

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη στροφορική κίνηση του συστήματος όταν $\varphi = 30^\circ$:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma\tau_{(K)} = I_{\text{ολ}(K)} \alpha'_\gamma &\Rightarrow M_1 g d'_1 + M g d'_2 = (I_{\text{δοκού}(K)} + I_{\text{τροχού}(K)}) \cdot \alpha'_\gamma \\ \text{με } d'_1 = \frac{L}{4} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m, } d'_2 = \frac{3L}{4} \sin 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ m και } I_{\text{τροχού}(K)} = M \left(\frac{3L}{4} \right)^2 &= 48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha'_\gamma = \sqrt{3} \text{ rad/s}^2.$$

Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού ως προς το σημείο K όταν $\varphi = 30^\circ$, ισχύει:

$$\left(\frac{dL_{\text{τροχού}}}{dt} \right)_{(K)} = I_{\text{τροχού}(K)} \cdot \alpha'_\gamma \Rightarrow \left(\frac{dL_{\text{τροχού}}}{dt} \right)_{(K)} = 48\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

- ε. Τη στιγμή που ο τροχός αποκολλάται από τη δοκό όλα του τα σημεία έχουν την ίδια οριζόντια ταχύτητα, ίση με την ταχύτητα του άκρου A της δοκού, δηλαδή: $v_A = \omega \cdot \frac{3L}{4} = 12 \text{ m/s}$.

Το κατώτερο σημείο B επαφής του τροχού με το δάπεδο έχει οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου $v_{B,0} = v_{\text{cm},0} = 12 \text{ m/s}$ προς τ' αριστερά ως προς το ακίνητο δάπεδο, οπότε θα αρχίσει να ολισθαίνει με αποτέλεσμα να δέχεται τριβή ολίσθησης με φορά προς τα δεξιά.

Εξαιτίας της τριβής το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F = M \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow \mu \cdot N = M \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow \mu \cdot Mg = M \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow a_{\text{cm}} = 4 \text{ m/s}^2.$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού λόγω μεταφορικής κίνησης είναι:

$$v_{\text{cm}} = v_{\text{cm},0} - a_{\text{cm}} t \Rightarrow v_{\text{cm}} = 12 - 4t \text{ (S.I.)}$$

Για τη μάζα του τροχού ισχύει: $M = M_\delta + 2m_p \Rightarrow M = 4m_p \Rightarrow m_p = \frac{1}{3} \text{ kg}$ και $M_\delta = \frac{2}{3} \text{ kg}$.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς το κέντρο μάζας του είναι: $I_{\text{tp}} = M_\delta R^2 + 2 \frac{1}{12} m_p (2R)^2 \Rightarrow I_{\text{tp}} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Εξαιτίας της ροπής της τριβής ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφορική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας του για την οποία ισχύει: $\Sigma\tau_{(\text{cm})} = I_{\text{tp}} \cdot \alpha_{\gamma\omega\gamma} \Rightarrow \mu \cdot Mg \cdot R = I_{\text{tp}} \cdot \alpha_{\gamma\omega\gamma} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\gamma} = 4 \text{ rad/s}^2$.

Η εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας του τροχού λόγω στροφορικής κίνησης είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\gamma} \cdot t \Rightarrow \omega = 4t \text{ (S.I.)}$

Ο τροχός θα ξεκινήσει να κυλιέται χωρίς ολίσθηση τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κατώτερου σημείου B επαφής του με το δάπεδο θα μηδενιστεί. Τότε μηδενίζεται η τριβή ολίσθησης, οπότε ο τροχός δέχεται $\Sigma F = 0$ και $\Sigma\tau = 0$, άρα θα αποκτήσει σταθερή γωνιακή και μεταφορική ταχύτητα κυλιόμενος. Δηλαδή:

$$v_B = 0 \Rightarrow v_{\text{cm}} - v_{\gamma\pi\alpha\mu} = 0 \Rightarrow v_{\text{cm}} = \omega \cdot R \Rightarrow 12 - 4t = 6t \Rightarrow t = 1,2 \text{ s}.$$

- ζ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού δίνεται από τη σχέση:

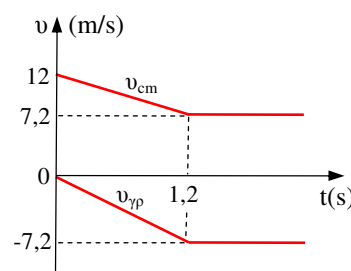
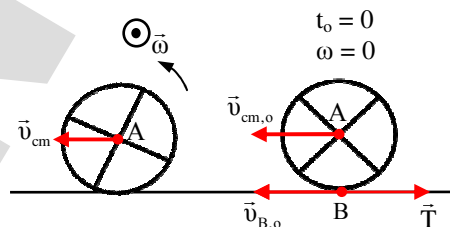
$$v_{\text{cm}} = 12 - 4t \text{ (S.I.) για } 0 \leq t \leq 1,2 \text{ s και } v_{\text{cm}} = 7,2 \text{ m/s για } t \geq 1,2 \text{ s}.$$

Η γραμμική ταχύτητα του κατώτερου σημείου του τροχού δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\gamma\pi} = -\omega \cdot R \Rightarrow v_{\gamma\pi} = -6t \text{ (S.I.) για } 0 \leq t \leq 1,2 \text{ s και}$$

$$v_{\gamma\pi} = -7,2 \text{ m/s για } t \geq 1,2 \text{ s}.$$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

η. Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού για $t = 1,2 \text{ s}$ είναι: $x_{\text{cm}} = v_{\text{cm},0}t - \frac{1}{2}a_{\text{cm}}t^2 \Rightarrow x_{\text{cm}} = 11,52 \text{ m}$.

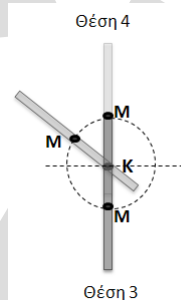
Το μήκος του τόξου που διαγράφεται από το κατώτερο σημείο του τροχού, εξαιτίας της στροφικής κίνησης για $t = 1,2 \text{ s}$ είναι: $\Delta S = R \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta S = R \cdot \frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2 \Rightarrow \Delta S = 4,32 \text{ m}$.

Άρα η απόσταση που διανύει ο τροχός ολισθαίνοντας μέχρι ν' αρχίσει η κύλιση είναι:
 $d = x_{\text{cm}} - \Delta S \Rightarrow d = 7,2 \text{ m}$.

θ. Για να εκτελέσει η δοκός ανακύκλωση αρκεί να περάσει από το ανώτερο σημείο (κατακόρυφη θέση 4) με κινητική ενέργεια $K_4 > 0$. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε για τη δοκό από την κατακόρυφη θέση 3 μέχρι την κατακόρυφη θέση 4:

$$E_3 = E_4 \Rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{δοκού}(K)}\omega^2 - M_1g\frac{L}{4} = K_4 + M_1g\frac{L}{4} \Rightarrow K_4 = -256 \text{ J} < 0$$

Άρα η δοκός δεν μπορεί να εκτελέσει ανακύκλωση.



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ANNA
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ