

ΑΣΚΗΣΗ

Μια τεντωμένη ομογενής ελαστική χορδή ΟΑ εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x . Το δεξιό άκρο Α της χορδής είναι στερεωμένο ακλόνητα στη θέση $x_A = 10,5 \text{ cm}$, ενώ το αριστερό άκρο Ο που βρίσκεται στη θέση $x_O = 0$ είναι ελεύθερο, έτσι ώστε με κατάλληλη διαδικασία να δημιουργείται στάσιμο κύμα. Τη στιγμή $t_0 = 0$ που αποκαθίσταται το στάσιμο κύμα στο σημείο Ο εμφανίζεται κοιλία που βρίσκεται στη θέση μηδενικής απομάκρυνσης κινούμενη κατά τη θετική φορά. Η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι $d_1 = 3 \text{ cm}$ και η μέγιστη απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι $d_2 = 5 \text{ cm}$. Ο χρόνος που απαιτείται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης μιας κοιλίας του στάσιμου κύματος, είναι $\Delta t = 2 \text{ s}$.

- Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και τη συχνότητα των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.
- Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας του στάσιμου κύματος.
- Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή.
- Να υπολογίσετε το πλήθος των δεσμών και το πλήθος των κοιλιών που δημιουργούνται κατά μήκος της χορδής.
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$.
- Να γίνει η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης των σημείων της χορδής.
- Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$.
- Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει την ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Β της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x_B = 1 \text{ cm}$, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.
- Να υπολογίσετε τις θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία τη χρονική στιγμή $t_3 = 4 \text{ s}$ έχουν μέτρο ταχύτητας ταλάντωσης $0,5\pi \text{ cm/s}$.
- Να προσδιοριστούν οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία ταλαντώνονται με ενέργεια ίση με το 75% της ενέργειας ταλάντωσης μιας κοιλίας. Θεωρήστε ότι όλα τα σημεία της χορδής έχουν ίδια μάζα.
- Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο υλικό σημείο Β της χορδής από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_4 = 5,5 \text{ s}$, αν η μάζα του είναι $m = 16 \text{ mg}$.

ΛΥΣΗ

- α. Δύο διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος έχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους, ίση με $\frac{\lambda}{2}$, όταν διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, οπότε $d_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2d_1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 6 \text{ cm}}$.

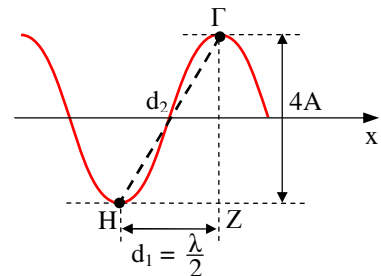
Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μιας κοιλίας μεγιστοποιείται όταν αυτή βρεθεί στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής της. Δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις συμβαίνουν κάθε $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \text{ s} \Rightarrow \boxed{f = 0,25 \text{ Hz}}$.

- β. Δύο διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος, (π.χ. τα σημεία Η και Γ του διπλανού σχήματος), έχουν την μέγιστη απόσταση μεταξύ τους, όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΖΗ έχουμε:

$$HG^2 = HZ^2 + GZ^2 \Rightarrow d_2^2 = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (4A)^2 \Rightarrow 4A = \sqrt{d_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \Rightarrow A = 1 \text{ cm}.$$

Το πλάτος ταλάντωσης κάθε κοιλίας είναι: $A'_K = 2A \Rightarrow \boxed{A'_K = 2 \text{ cm}}$.



- γ. Η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι:

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y = 2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{2} \quad (y, x \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

- δ. Για τους δεσμούς του στάσιμου κύματος ισχύει: $x_A = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ με $k \in \mathbb{Z}$. Πρέπει

$$x_O \leq x_A \leq x_A \Rightarrow 0 \leq (2k+1)\frac{\lambda}{4} \leq 10,5 \Rightarrow 0 \leq 3k+1,5 \leq 10,5 \Rightarrow -0,5 \leq k \leq 3 \left. \vphantom{0 \leq 3k+1,5 \leq 10,5} \right\} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3.$$

με $k \in \mathbb{Z}$

Δηλαδή κατά μήκος της χορδής δημιουργούνται 4 δεσμοί.

Για τις κοιλίες του στάσιμου κύματος ισχύει: $x_K = k\frac{\lambda}{2}$ με $k \in \mathbb{Z}$. Πρέπει

$$x_O \leq x_K \leq x_A \Rightarrow 0 \leq k\frac{\lambda}{2} \leq 10,5 \Rightarrow 0 \leq 3k \leq 10,5 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3,5 \left. \vphantom{0 \leq 3k \leq 10,5} \right\} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3.$$

με $k \in \mathbb{Z}$

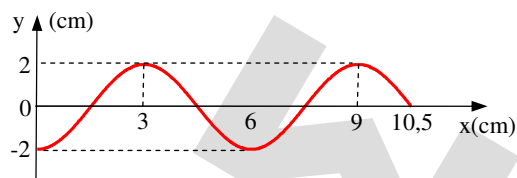
Δηλαδή κατά μήκος της χορδής δημιουργούνται 4 κοιλίες.

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

- ε. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$, η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα είναι: $y = -2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}$ (y, x σε cm)

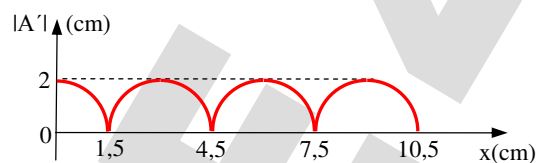
Το στιγμιότυπο της χορδής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- στ. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων της χορδής είναι:

$$|A'| = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \Rightarrow |A'| = 2 \left| \sin \frac{\pi x}{3} \right| \quad (A', x \text{ σε cm})$$

Η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης των σημείων της χορδής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- ζ. Η πρώτη κοιλία στη θέση $x = 0$ για $t_1 = 1 \text{ s}$, έχει $y = 2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} \text{ cm}$, δηλαδή έχει φάση $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Τα σημεία του μέσου με $0 \leq x < \frac{\lambda}{4} = 1,5 \text{ cm}$ και $4,5 \text{ cm} = \frac{3\lambda}{4} < x < \frac{5\lambda}{4} = 7,5 \text{ cm}$ έχουν την ίδια φάση φ_1 με την πρώτη κοιλία.

Η δεύτερη κοιλία στη θέση $x = \frac{\lambda}{2} = 3 \text{ cm}$ για $t_1 = 1 \text{ s}$, έχει

$$y = -2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) \Rightarrow y = 2 \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{2} \text{ cm}, \text{ δηλαδή}$$

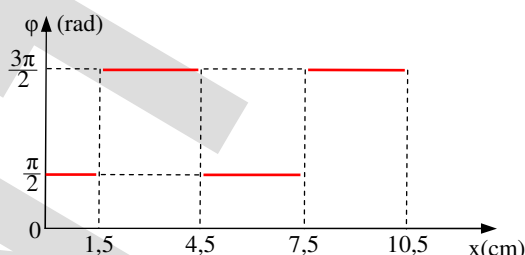
$$\text{έχει φάση } \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$$

Τα σημεία του μέσου με $1,5 \text{ cm} = \frac{\lambda}{4} < x < \frac{3\lambda}{4} = 4,5 \text{ cm}$ και

$7,5 \text{ cm} = \frac{5\lambda}{4} < x < \frac{7\lambda}{4} = 10,5 \text{ cm}$ έχουν την ίδια φάση φ_2 με τη

δεύτερη κοιλία.

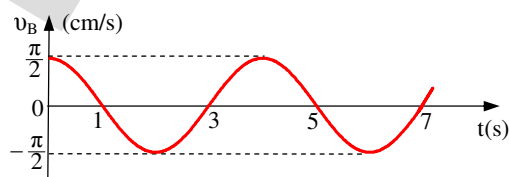
Η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων της χορδής φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.



- η. Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου B με $x_B = 1 \text{ cm}$ είναι:

$$v_B = \omega 2A \sin \frac{\pi x_B}{3} \sin \frac{\pi t}{2} \Rightarrow v_B = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2} \quad (v_B \text{ σε cm/s, } t \text{ σε s})$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- θ. Πρέπει για $t_3 = 4 \text{ s}$,

$$|v_t| = 0,5\pi \Rightarrow \left| \omega 2A \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin 2\pi \right| = 0,5\pi \Rightarrow \left| \sin \frac{\pi x}{3} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi x}{3} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 3k \pm 1 \text{ cm}$$

με $0 \leq x \leq 10,5 \text{ cm}$ παίρνουμε τα σημεία $x = 1 \text{ cm}$ ή 2 cm ή 4 cm ή 5 cm ή 7 cm ή 8 cm ή 10 cm .

- ι. Πρέπει $E = \frac{75}{100} E_K \stackrel{D=m\omega^2}{\Rightarrow} \frac{1}{2} m\omega^2 (A')^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2} m\omega^2 A_K^2 \Rightarrow (A')^2 = \frac{3}{4} (2A)^2 \Rightarrow (A')^2 = 3A^2 \Rightarrow A' = \pm\sqrt{3}A \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2A \cdot \sin \frac{\pi x}{3} = \pm\sqrt{3}A \Rightarrow \sin \frac{\pi x}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 3k \pm \frac{1}{2} \text{ cm}$$

με $0 \leq x \leq 10,5 \text{ cm}$ παίρνουμε τα σημεία $x = 0,5 \text{ cm}$ ή $2,5 \text{ cm}$ ή $3,5 \text{ cm}$ ή $5,5 \text{ cm}$ ή $6,5 \text{ cm}$ ή $8,5 \text{ cm}$ ή $9,5 \text{ cm}$.

- κ. Η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σημείο B κατά την ταλάντωσή του. Για το έργο της εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$W_{\Sigma F} = \Delta K \Rightarrow W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} m v_{B_{\text{τελ}}}^2 - \frac{1}{2} m v_{B_{\text{αρχ}}}^2.$$

$$\text{Για } t_0 = 0, v_{B_{\text{αρχ}}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t_0}{2} \Rightarrow v_{B_{\text{αρχ}}} = \frac{\pi}{2} \text{ cm/s} \text{ και για } t_4 = 5,5 \text{ s, } v_{B_{\text{τελ}}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t_4}{2} \Rightarrow v_{B_{\text{τελ}}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \text{ cm/s.}$$

$$\text{Οπότε } W_{\Sigma F} = -\pi^2 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ