

## ΑΣΚΗΣΗ

Στο σχήμα φαίνεται το σύστημα δύο όμοιων ράβδων που ισορροπούν. Η κάθε ράβδος έχει μάζα  $M = 0,3 \text{ kg}$  και μήκος  $\ell = 0,4 \text{ m}$ . Η ράβδος (OA) μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το άκρο της (O). Η ράβδος (BG) στηρίζεται με το ένα άκρο της (Γ) σε λείο κατακόρυφο τοίχο και το άλλο της άκρο (B) σε οριζόντιο δάπεδο. Το άκρο (A) της ράβδου (OA) είναι σε επαφή με το μέσο (M) της ράβδου (BG). Μεταξύ των δύο ράβδων δεν υπάρχουν τριβές. Στη θέση που βρίσκεται η ράβδος (BG) στο σχήμα ισορροπεί οριακά.

α) Να βρεθεί ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής ανάμεσα στο οριζόντιο δάπεδο και στην ράβδο (BG).

Ασκούμε στη ράβδο (OA) ζεύγος δυνάμεων, οι φορείς των οποίων βρίσκονται συνεχώς σε κατακόρυφο επίπεδο και είναι συνεχώς κάθετοι στη ράβδο. Το μέτρο των δυνάμεων του ζεύγους είναι  $F_1 = F_2 = \frac{32,2}{\pi} \text{ N}$  και η απόσταση των φορέων των δύο δυνάμεων του ζεύγους είναι  $d = 0,1 \text{ m}$ . Η ράβδος (OA) αρχίζει να περιστρέφεται προς τα πάνω.

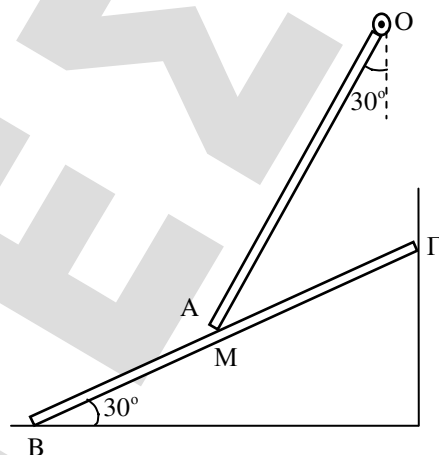
β) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας  $\vec{\omega}_1$  της ράβδου (OA), όταν έχει περιστραφεί κατά γωνία  $90^\circ$ .

Τη στιγμή που η ράβδος (OA) έχει περιστραφεί κατά γωνία  $90^\circ$ , το ζεύγος δυνάμεων καταργείται και η ράβδος συγκρούεται πλαστικά με σημειακό βλήμα μάζας  $m = 0,1 \text{ kg}$ , το οποίο κινείται κάθετα προς την ράβδο έχοντας ταχύτητα  $\vec{v}_0$ . Η σύγκρουση γίνεται στο σημείο Δ της ράβδου όπου  $(O\Delta) = 0,3 \text{ m}$ . Μετά τη σύγκρουση το σύστημα ακινητοποιείται στιγμιαία τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφο για πρώτη φορά.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας  $\vec{v}_0$  του βλήματος.

δ) Εάν θεωρήσουμε σαν επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο, να υπολογίσετε το επί τοις εκατό ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ράβδου (OA) – βλήμα, που έχει γίνει θερμότητα κατά την κρούση.

Δίνονται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της  $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$  και για τις πράξεις των ερωτημάτων β και δ,  $\sqrt{3} \cong 1,7$ .



## ΛΥΣΗ

α) Για την ισορροπία της ράβδου (OA) ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow F_x \cdot \ell \cdot \sin 30^\circ + F_y \cdot \ell \cdot \cos 30^\circ - B_1 \cdot \frac{\ell}{2} \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - B_1 \cdot \frac{1}{2} \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N}.$$

Για την οριακή ισορροπία της ράβδου (BG) ισχύει:

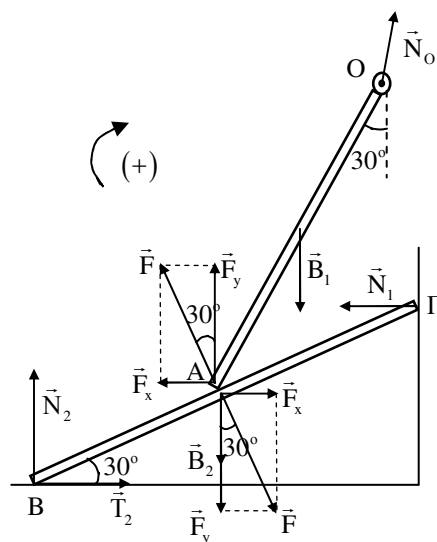
$$\Sigma \vec{\tau}_{(B)} = 0 \Rightarrow B_2 \cdot \frac{\ell}{2} \sin 30^\circ + F_y \cdot \frac{\ell}{2} \sin 30^\circ + F_x \cdot \frac{\ell}{2} \cos 30^\circ - N_1 \ell \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 = B_2 \sin 30^\circ + F \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow N_1 = 2\sqrt{3} \text{ N}.$$

Για την ισορροπία της ράβδου (BG) ισχύει επίσης:

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_2 = F \cdot \sin 30^\circ + B_2 \Rightarrow N_2 = \frac{15}{4} \text{ N} \text{ και}$$

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_2 + F_x - N_1 = 0 \Rightarrow \mu N_2 + F \cdot \cos 30^\circ = N_1 \Rightarrow \mu = \frac{7\sqrt{3}}{15}.$$



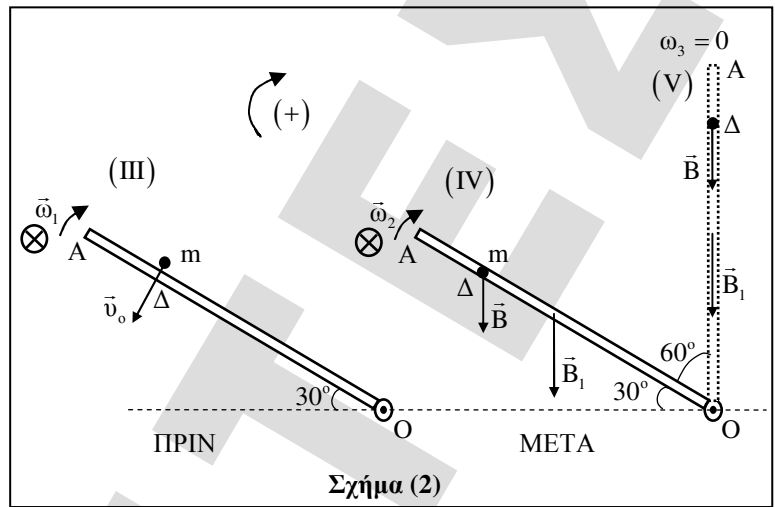
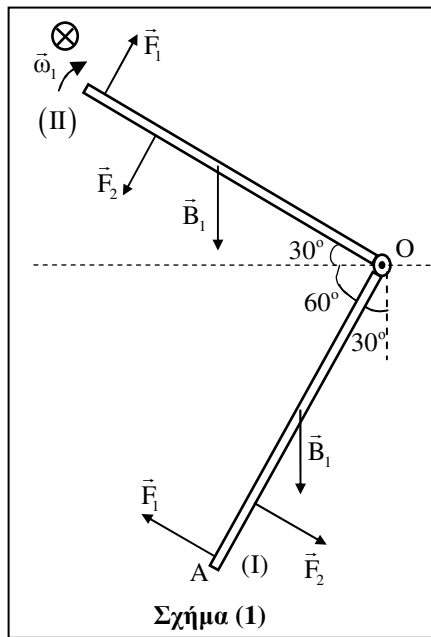
β) Με εφαρμογή του θεωρήματος Steiner για τη ράβδο (OA) έχουμε:

$$I_{(O)} = I_{cm} + M \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{M\ell^2}{3} \Rightarrow I_{(O)} = 0,016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Η ροπή του ζεύγους είναι σταθερή και έχει μέτρο  $\tau_{\text{ζεύγους}} = F_1 \cdot d \Rightarrow \tau_{\text{ζεύγους}} = \frac{3,22}{\pi} \text{ N} \cdot \text{m}$ , ανεξάρτητα από τα σημεία που ασκούνται οι δυνάμεις του ζεύγους.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για τη στροφική κίνηση της ράβδου (OA) από τη θέση (I) μέχρι τη θέση (II), (βλέπε σχήμα 1), όπου η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου είναι  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ .

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{\text{ζεύγους}} + W_{B_1} \Rightarrow \frac{1}{2} I_{(O)} \cdot \omega_1^2 = \tau_{\text{ζεύγους}} \cdot \Delta\theta - B_1 \left[ \frac{\ell}{2} \eta\mu 60^\circ + \frac{\ell}{2} \eta\mu 30^\circ \right] \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 10 \text{ rad/s.}}$$



γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος (OA) – βλήμα, ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$I_{O\Lambda(O)} = I_{(O)} + m \cdot (O\Delta)^2 \Rightarrow I_{O\Lambda(O)} = 0,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για τη στροφική κίνηση του συστήματος ράβδος (OA) – βλήμα, από την θέση (IV) στη θέση (V), (βλέπε σχήμα 2), για να βρούμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας  $\omega_2$  του συστήματος αμέσως μετά την κρούση.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ.}} = W_B + W_{B_1} \Rightarrow -\frac{1}{2} I_{O\Lambda(O)} \cdot \omega_2^2 = -B \cdot [(O\Delta) - (O\Delta) \eta\mu 30^\circ] - B_1 \cdot \left[ \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \eta\mu 30^\circ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{O\Lambda(O)} \cdot \omega_2^2 = mg \cdot (O\Delta) \cdot \frac{1}{2} + Mg \cdot \frac{\ell}{4} \Rightarrow \omega_2 = 6 \text{ rad/s.}$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση.

$$\vec{L}_{O\Lambda(\text{ΠΡΙΝ})} = \vec{L}_{O\Lambda(\text{ΜΕΤΑ})} \Rightarrow I_{(O)} \cdot \omega_1 - m \cdot v_o \cdot (O\Delta) = I_{O\Lambda(O)} \cdot \omega_2 \Rightarrow \boxed{v_o = \frac{10}{3} \text{ m/s.}}$$

δ) Η απόσταση του άκρου (O) από το έδαφος είναι:

$$h = h_1 + h_2 \Rightarrow h = \ell \cdot \sin 30^\circ + \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow h = 0,44 \text{ m.}$$

Οι απώλειες ενέργειας κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι:

$$Q = K_{O\Lambda(\text{ΠΡΙΝ})} - K_{O\Lambda(\text{ΜΕΤΑ})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \left[ \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} I_{(O)} \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_{O\Lambda(O)} \cdot \omega_2^2 \right] \Rightarrow Q \approx 0,9 \text{ J.}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος ράβδος (OA) – βλήμα αμέσως πριν την πλαστική κρούση, (θέση III), είναι:

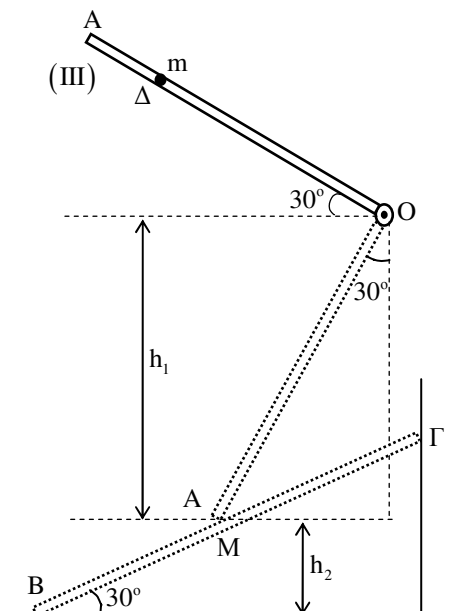
$$E = K_m + U_m + K_{OA} + U_{OA} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} m v_o^2 + mg \left[ h + (O\Delta) \eta\mu 30^\circ \right] + \frac{1}{2} I_{(O)} \cdot \omega_1^2 + Mg \cdot \left[ h + \frac{\ell}{2} \eta\mu 30^\circ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \approx 3,56 \text{ J.}$$

Το ποσοστό απώλειας της αρχικής ενέργειας του συστήματος κατά την

$$\text{κρούση ισούται με } \Pi\% = \frac{Q}{E} 100\% \Rightarrow \boxed{\Pi\% \approx 25\%}.$$



#### ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ  
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ  
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ  
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

**ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ**