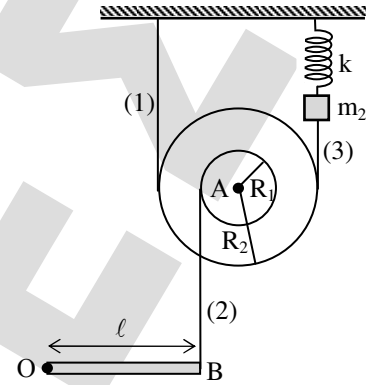


ΑΣΚΗΣΗ

Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ομόκεντρους δίσκους με ακτίνες $R_1 = 0,5\text{m}$ και $R_2 = 1\text{m}$, κολλημένους μεταξύ τους, έτσι ώστε να μπορούν να περιστρέφονται ως ένα σώμα γύρω από το κοινό τους κέντρο Α. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 0,5\text{kg}\cdot\text{m}^2$ και η μάζα της είναι $M = 2\text{kg}$. Στο εξωτερικό αυλάκι της τροχαλίας έχουν τυλιχθεί κατακόρυφο αβαρές μη εκτατό νήμα (1) που είναι δεμένο στην οροφή και κατακόρυφο αβαρές μη εκτατό νήμα (3) που είναι δεμένο σε σώμα μάζας $m_2 = 1\text{kg}$. Το σώμα μάζας m_2 είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Στο εσωτερικό αυλάκι της τροχαλίας έχει τυλιχθεί κατακόρυφο αβαρές μη εκτατό νήμα (2) το οποίο καταλήγει στο άκρο Β οριζόντιας ομογενούς ράβδου ΟΒ μήκους $\ell = 0,3\text{m}$ και μάζας $m = 12\text{kg}$. Η ράβδος ΟΒ είναι αρθρωμένη στο άλλο άκρο της Ο. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί και όλα τα νήματα βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε:



- Την παραμόρφωση του ελατηρίου κατά την ισορροπία του συστήματος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε ταυτόχρονα τα νήματα (2) και (3), οπότε το σώμα μάζας m_2 ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η ράβδος ΟΒ ξεκινά να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο και η τροχαλία ξεκινά να εκτελεί σύνθετη κίνηση. Να υπολογίσετε:
- Τη χρονική εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_2 θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω.
- Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης της τροχαλίας, τη χρονική στιγμή που το σώμα μάζας m_2 διέρχεται για πρώτη φορά κατά την ταλάντωσή του, από τη θέση όπου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $d_1 = 0,025\text{m}$.
- Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου την στιγμή που αφήνεται ελεύθερη.
- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου τη στιγμή που έχει περιστραφεί κατά $\varphi = 60^\circ$.
- Την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου την στιγμή που γίνεται κατακόρυφη. Όταν η ράβδος ΟΒ φτάνει στην κατακόρυφη θέση της για πρώτη φορά συγκρούεται ελαστικά στο κάτω άκρο της Β με αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_1 . Αν η ράβδος ακινητοποιείται εξαιτίας της κρούσης, να υπολογίσετε:
- Τη μάζα m_1 και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την ελαστική κρούση.

Δίνονται $g = 10\text{m/s}^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m\ell^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- α. Για την ισορροπία της ράβδου ΟΒ ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow w_p \cdot \frac{\ell}{2} = T_2 \cdot \ell \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{2} \Rightarrow T_2 = 60\text{N}.$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \tau_{(A)} = 0 &\Rightarrow T_3 \cdot R_2 + T_2 \cdot R_1 = T_1 \cdot R_2 \Rightarrow T_1 - T_3 = 30\text{N} \\ \text{και} \\ \Sigma F = 0 &\Rightarrow T_1 + T_3 = Mg + T_2 \Rightarrow T_1 + T_3 = 80\text{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 55\text{N} \\ T_3 = 25\text{N} \end{cases}$$

Για την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = w_2 + T_3 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = 35\text{N}.$$

Οπότε για την παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει: $F_{\text{ελ}} = k \cdot d \Rightarrow d = 0,35\text{m}$.

- β. Το σώμα μάζας m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:

$$y = A \cdot \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{όπου } k = m_2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega = 10\text{rad/s}.$$

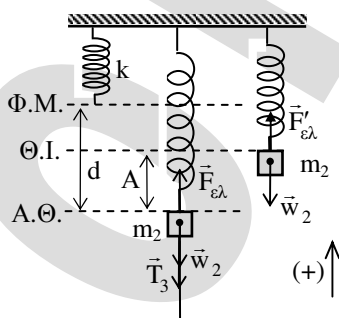
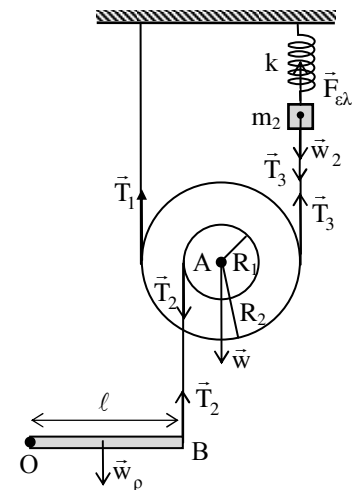
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση $y = -A$, επομένως

$$A \cdot \eta \mu \varphi_0 = -A \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}.$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\text{ελ}} = w_2 \Rightarrow k \cdot (d - A) = m_2 g \Rightarrow A = 0,25\text{m}.$$

$$\text{Οπότε η εξίσωση ταλάντωσης είναι: } y = 0,25 \cdot \eta \mu \left(10t + \frac{3\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$



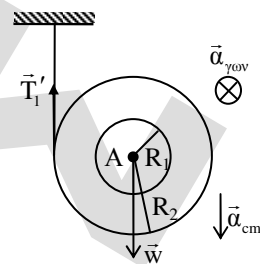
- γ. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1' \cdot R_2 = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1' = 0,5 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad ①$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση της τροχαλίας:

$$\Sigma F = M a_{cm} \Rightarrow w - T_1' = M \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R_2 \quad ②$$

$$\text{Από } ①, ② \Rightarrow Mg - 0,5 \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 8 \text{ rad/s}^2}.$$



- δ. Τη χρονική στιγμή που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο για πρώτη φορά κατά $d_1 = 0,025\text{m}$, το ταλαντευόμενο σώμα βρίσκεται στη θέση:

$$y_1 = +(d - A + d_1) \Rightarrow y_1 = +0,125\text{m} \Rightarrow y_1 = +\frac{A}{2} \text{ με } v_1 > 0 \text{ για πρώτη φορά.}$$

$$\text{Οπότε } y_1 = +\frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) = +\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{με } v_1 > 0]{1\text{η φορά}} 10t + \frac{3\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{15} \text{ s.}$$

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας λόγω στροφικής κίνησης, την παραπάνω χρονική στιγμή ισχύει:

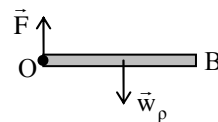
$$\frac{dK_{\sigma\tau\pi}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\pi}}{dt} = \frac{\Sigma\tau \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\pi}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega_{\tau\pi} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\pi}}{dt} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \Rightarrow \boxed{\frac{dK_{\sigma\tau\pi}}{dt} = \frac{32\pi}{15} \text{ J/s.}}$$

- ε. Με εφαρμογή του θεωρήματος Steiner, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της, είναι:

$$I_{(O)} = I_{cm} + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

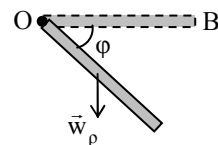
Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση της ράβδου:

$$\Sigma \tau_{(O)} = I_{(O)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu, \rho} \Rightarrow mg \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} m \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\nu, \rho} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu, \rho} = \frac{3g}{2\ell} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu, \rho} = 50 \text{ rad/s}^2}.$$



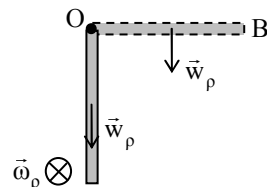
- στ. Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο Newton για τη στροφική κίνηση της ράβδου τη στιγμή που έχει περιστραφεί κατά $\varphi = 60^\circ$, οπότε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{(O)} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = w_\rho \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\varphi \Rightarrow \frac{dL}{dt} = mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2}.$$



- ζ. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για τη στροφική κίνηση της ράβδου από την οριζόντια έως την κατακόρυφη θέση.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_\rho} \Rightarrow \frac{1}{2} I_{(O)} \omega_\rho^2 = mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{3} m \ell^2 \omega_\rho^2 = mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow \omega_\rho = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \Rightarrow \boxed{\omega_\rho = 10 \text{ rad/s}}.$$



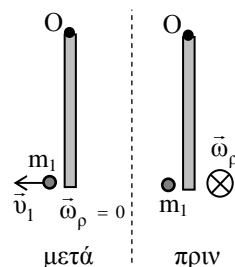
- η. Για το σύστημα ράβδου OB - σώμα μάζας m_1 , εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης στροφορμής κατά την κρούση:

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετά}} \Rightarrow I_{(O)} \cdot \omega_\rho = m_1 v_1 \ell \Rightarrow \frac{1}{3} m \ell^2 \cdot \omega_\rho = m_1 v_1 \ell \Rightarrow m_1 v_1 = 12 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad ③$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$K_{\text{ολ.πριν}} = K_{\text{ολ.μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2} I_{(O)} \cdot \omega_\rho^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow \frac{1}{3} m \ell^2 \cdot \omega_\rho^2 = m_1 v_1^2 \Rightarrow m_1 v_1^2 = 36 \text{ J} \quad ④$$

$$\text{Οπότε } ③, ④ \Rightarrow \boxed{v_1 = 3 \text{ m/s}} \text{ και } \boxed{m_1 = 4 \text{ kg}}.$$



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ