

ΑΣΚΗΣΗ

Δύο ελαστικά νήματα μεγάλου μήκους συνδέονται στο σημείο Ο και σχηματίζουν ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Το σημείο σύνδεσης Ο ($x = 0$), αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ να κινείται κατακόρυφα με την επίδραση δύο ταλαντώσεων:

$$y_\alpha = 5 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ και } y_\beta = 5\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \quad (y_\alpha, y_\beta \text{ σε cm, } t \text{ σε s}).$$

Σημείο Μ του ενός νήματος που βρίσκεται στη θέση $x_M = 2\text{m}$, αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $t_M = 0,4\text{s}$, ενώ σημείο Ν του άλλου νήματος με $x_N = -2\text{m}$, αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $t_N = 0,3\text{s}$.

- α. Να βρείτε την εξίσωση κίνησης του σημείου Ο.
- β. Να βρείτε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιουργούνται.
- γ. Να βρείτε την φάση των σημείων του ελαστικού μέσου τη στιγμή $t_1 = 0,6\text{s}$ και να την παραστήσετε γραφικά.
- δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 .
- ε. Να βρείτε την διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Μ και Ν τη χρονική στιγμή t_1 .
- στ. Να βρείτε πόσα σημεία του ελαστικού μέσου, έχουν κατά τη χρονική στιγμή t_1 , κινητική ενέργεια ίση με την δυναμική ενέργεια ταλάντωσής τους.
- ζ. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή το σημείο Μ έχει κινητική ενέργεια τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσής του για δεύτερη φορά.
- η. Να βρείτε την απομάκρυνση και την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Ν όταν το σημείο Μ έχει απομάκρυνση -8cm κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας του.
- θ. Να βρείτε την ενέργεια ταλάντωσης στοιχειώδους τμήματος του νήματος που έχει μάζα $\Delta m = 10^{-4}\text{kg}$.
- ι. Αν η μάζα ανά μονάδα μήκους του νήματος που είναι στο θετικό ημιάξονα είναι $0,2\text{kg/m}$ και του νήματος στον αρνητικό ημιάξονα είναι $0,4\text{kg/m}$, να βρείτε την ενέργεια που παρέχει η πηγή στη μονάδα του χρόνου.

ΛΥΣΗ

- α. Η κίνηση του σημείου Ο είναι αποτέλεσμα της σύνθεσης των αρμονικών ταλαντώσεων:

$$y_\alpha = 5 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y_\alpha = 5 \cdot \eta\mu\left[\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } y_\beta = 5\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \quad (y_\alpha, y_\beta \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

οι οποίες έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια συχνότητα, ίδια θέση ισορροπίας και διαφορά φάσης $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η κίνηση του σημείου Ο είναι απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_O = A \cdot \eta\mu\left[\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) + \theta\right]$

$$\text{όπου } A = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} + 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 10\text{cm} \text{ και } \varepsilon\phi\theta = \frac{5}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Άρα η εξίσωση κίνησης του σημείου Ο είναι $y_O = 0,1 \cdot \eta\mu(10\pi t)$ (S.I.).

- β. Η ταλάντωση του σημείου Ο, δημιουργεί αρμονικό κύμα που αρχίζει να διαδίδεται ταυτόχρονα και προς τον θετικό και προς τον αρνητικό ημιάξονα με διαφορετικές ταχύτητες αφού είναι διαφορετικά τα μέσα διάδοσης. Κάθε σημείο του μέσου αρχίζει να ταλαντώνεται μόλις το κύμα φτάνει σ' αυτό. Άρα το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του κάθε κύματος είναι:

$$v_1 = \frac{x_M}{t_M} \Rightarrow v_1 = 5\text{m/s} \text{ για το κύμα στο θετικό ημιάξονα και } v_2 = \frac{|x_N|}{t_N} \Rightarrow v_2 = \frac{20}{3}\text{m/s} \text{ για το κύμα στον αρνητικό ημιάξονα.}$$

Η συχνότητα των δύο κυμάτων είναι ίση με τη συχνότητα ταλάντωσης του σημείου Ο, οπότε αφού $\omega = 10\pi \text{ rad/s} \Rightarrow f = 5\text{Hz}$. Τα μήκη των κυμάτων στο θετικό και στον αρνητικό ημιάξονα αντίστοιχα είναι:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} \Rightarrow \lambda_1 = 1\text{m} \text{ και } \lambda_2 = \frac{v_2}{f} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4}{3}\text{m}.$$

Το πλάτος του κάθε κύματος είναι ίδιο με το πλάτος ταλάντωσης $A = 0,1\text{m}$ της πηγής, αφού πρόκειται για γραμμικά ελαστικά μέσα. Αφού η πηγή δεν έχει αρχική φάση για τις εξισώσεις των δύο κυμάτων στον θετικό και στον αρνητικό ημιάξονα αντίστοιχα ισχύει:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(5t - x) \text{ (S.I.) για } x \geq 0 \text{ και } y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{3x}{4}\right) \text{ (S.I.) για } x \leq 0.$$

- γ. Οι παραπάνω εξισώσεις για τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,6\text{s}$ γίνονται:

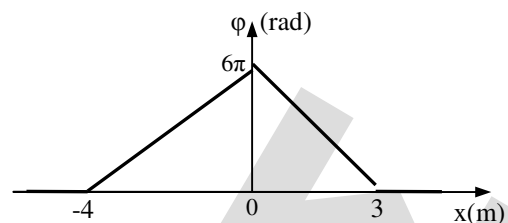
$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(3 - x) \text{ (S.I.) (S.I.) για } 0 \leq x \leq 3\text{m} \text{ και}$$

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(3 + \frac{3x}{4}\right) \text{ (S.I.) για } -4\text{m} \leq x \leq 0.$$

Οπότε για τη φάση των σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\varphi = \begin{cases} 6\pi - 2\pi x, & \text{για } 0 \leq x \leq 3\text{m} \\ 6\pi + \frac{3\pi}{2}x, & \text{για } -4\text{m} \leq x \leq 0 \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

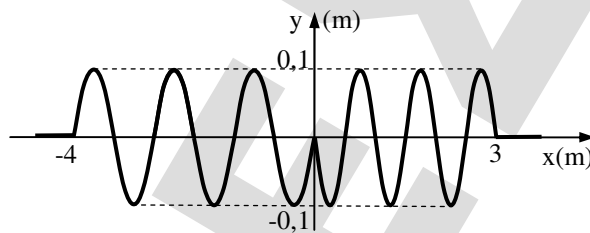
Το διάγραμμα της φάσης φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων για $t_1 = 0,6\text{s}$ είναι:

$$y = \begin{cases} 0,1 \cdot \eta\mu(6\pi - 2\pi x), & \text{για } 0 \leq x \leq 3\text{m} \\ 0,1 \cdot \eta\mu\left(6\pi + \frac{3\pi}{2}x\right), & \text{για } -4\text{m} \leq x \leq 0 \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

Το στιγμιότυπο του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ε. Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει φτάσει και στα δύο σημεία Μ και Ν, οπότε η διαφορά φάσης τους είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_M \Rightarrow \Delta\varphi = \left(6\pi + \frac{3\pi}{2}x_N\right) - \left(6\pi - 2\pi x_M\right) \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \text{ rad.}$$

στ. Τα σημεία του ελαστικού μέσου εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση οπότε $E = K + U$. Όταν $K = U$ ισχύει $E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow y = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$. Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο στο ερώτημα (δ), κατά τη χρονική στιγμή t_1 , υπάρχουν 24 σημεία του μέσου τα οποία έχουν $K = U$.

ζ. Όταν $K = 3U$ ισχύει $E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow y = \pm \frac{A}{2}$, οπότε για το σημείο Μ ($x_M = 2\text{m}$) ισχύει:

$$0,1 \cdot \eta\mu(10\pi - 4\pi) = \pm 0,05 \Rightarrow \eta\mu(10\pi - 4\pi) = \pm 0,5 \Rightarrow 10\pi - 4\pi = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

Για δεύτερη φορά γίνεται $K = 3U$ όταν: $10\pi - 4\pi = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{29}{60}\text{s}$.

η. Τα σημεία Μ, Ν όπως είδαμε στο ερώτημα (ε) έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, δηλαδή είναι σημεία σε αντίθεση φάσης, οπότε έχουν αντίθετες ταχύτητες και αντίθετες απομακρύνσεις. Άρα $y_N = 8\text{cm}$ και $v_N < 0$. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης ενέργειας για την ταλάντωση του σημείου Ν ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \pm 0,6\pi \text{ m/s. Οπότε } v_N = -0,6\pi \text{ m/s.}$$

θ. Η ενέργεια ταλάντωσης του τμήματος με μάζα Δm είναι: $E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}(\Delta m)\omega^2 A^2 \Rightarrow E = 5\pi^2 \cdot 10^{-5}\text{J}$.

ι. Σε χρονικό διάστημα Δt το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\Delta x_1 = v_1 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = 5 \cdot \Delta t$ στο θετικό ημιάξονα και κατά $\Delta x_2 = v_2 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{20}{3} \cdot \Delta t$ στον αρνητικό ημιάξονα.

Το τμήμα Δx_1 του νήματος στο θετικό ημιάξονα έχει μάζα $\Delta m_1 = 0,2 \cdot \Delta x_1 \Rightarrow \Delta m_1 = 0,2 \cdot 5 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta m_1 = 1 \cdot \Delta t$ (S.I.) και το τμήμα Δx_2 του νήματος στον αρνητικό ημιάξονα έχει μάζα $\Delta m_2 = 0,4 \cdot \Delta x_2 \Rightarrow \Delta m_2 = 0,4 \cdot \frac{20}{3} \cdot \Delta t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta m_2 = \frac{8}{3} \cdot \Delta t \text{ (S.I.).}$$

Άρα η πηγή στο χρόνο Δt έχει δώσει ενέργεια $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}(\Delta m_1)\omega^2 A^2 + \frac{1}{2}(\Delta m_2)\omega^2 A^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}(\Delta m_1 + \Delta m_2)\omega^2 A^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{11\pi^2}{6} \cdot \Delta t \text{ (S.I.).}$$

Άρα η ισχύς της πηγής είναι: $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{11\pi^2}{6} \text{ W}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ