

ΑΣΚΗΣΗ

Σώμα μάζας $M = 5 \text{ kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1$, της οποίας η διεύθυνση σχηματίζει γωνία $\phi = 60^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται κινείται αρχικά στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα συναντά κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 30^\circ$, με το οποίο

παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Στο σώμα μάζας M είναι προσαρμοσμένη ηχητική πηγή, που αρχίζει την παραγωγή αρμονικού ήχου συχνότητας $f_1 = 684 \text{ Hz}$ αμέσως μετά την κρούση. Ο παρατηρητής Π που φαίνεται στο σχήμα αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας $f_2 = 680 \text{ Hz}$ αμέσως μετά την κρούση. Να υπολογίσετε:

- 1) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- 2) Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος αμέσως πριν την κρούση.
- 3) Την απώλεια μηχανικής ενέργειας, λόγω της κρούσης.
- 4) Τη μετατόπιση του συσσωματώματος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.
- 5) Το ποσοστό κινητικής ενέργειας του βλήματος πριν την κρούση που μετατράπηκε σε θερμότητα εξαιτίας της τριβής ολίσθησης στη χρονική διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος ώσπου αυτό να σταματήσει.
- 6) Τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων μεταξύ των χρονικών στιγμών αμέσως πριν και αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- 7) Να ελέγξετε αν το συσσωμάτωμα θα επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
- 8) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία έπρεπε να κινείται το σώμα μάζας M αμέσως πριν την πλαστική κρούση, ώστε ο ακίνητος παρατηρητής Π να αντιλαμβάνονταν ήχο συχνότητας $f_3 = 726,75 \text{ Hz}$ αμέσως μετά την κρούση. Δίνονται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $v_{\text{ηχ}} = 340 \text{ m/s}$ και η βαρυτική επιτάχυνση $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να θεωρήσετε τη χρονική διάρκεια της κρούσης αμελητέα, ότι στο κεκλιμένο επίπεδο $\mu_{\text{σmax}} = \mu$ και ότι κατά τη μετάβαση του συσσωματώματος από το οριζόντιο στο κεκλιμένο επίπεδο, δεν συμβαίνει απώλεια κινητικής ενέργειας.

ΛΥΣΗ

- 1) Έστω $\vec{v}_s$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση. Επειδή η ηχητική πηγή (συσσωμάτωμα) απομακρύνεται από τον ακίνητο παρατηρητή Π με ταχύτητα $\vec{v}_s$, η συχνότητα f_2 του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, δίνεται από τη σχέση:

$$f_2 = \frac{v_{\text{ηχ}}}{v_{\text{ηχ}} + v_s} \cdot f_1 \Rightarrow \boxed{v_s = 2 \text{ m/s}}$$

- 2) Η ορμή του συστήματος βλήμα-σώμα κατά την κρούση διατηρείται σταθερή μόνο στην οριζόντια διεύθυνση (άξονας $x'x$). Οπότε:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{x'x(\text{πριν})} &= \vec{P}_{x'x(\text{μετά})} \Rightarrow m v_{1,x} = (M+m) v_s \Rightarrow m v_1 \cdot \sin\phi = (M+m) v_s \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{(M+m) v_s}{m \cdot \sin\phi} \Rightarrow \boxed{v_1 = 24 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

- 3) Για την απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση ισχύει:

$$E_{\text{απολ}} = K_{\text{συστ.}(\text{πριν})} - K_{\text{συστ.}(\text{μετά})} \Rightarrow E_{\text{απολ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} (m+M) v_s^2 \Rightarrow \boxed{E_{\text{απολ}} = 276 \text{ J}}$$

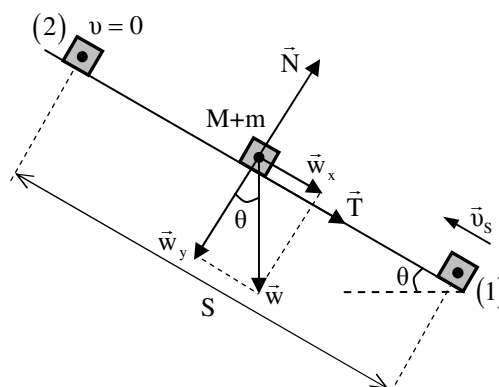
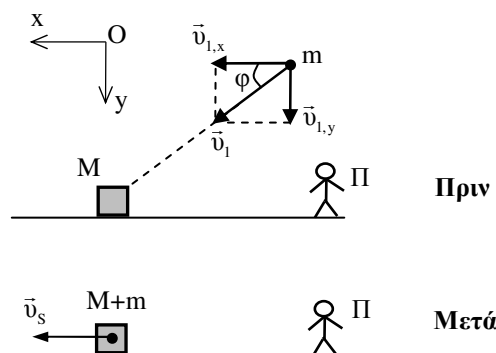
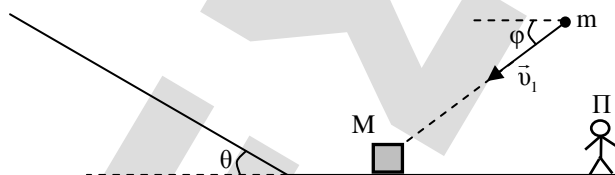
- 4) Από την ανάλυση της δύναμης του βάρους του συσσωματώματος στο κεκλιμένο επίπεδο προκύπτει:

$$w_x = (M+m)g \cdot \eta\mu\theta \quad \text{και} \quad w_y = (M+m)g \cdot \sigma\upsilon\eta\theta.$$

Για την τριβή ολίσθησης που δέχεται το συσσωμάτωμα κατά την κίνησή του στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} T &= \mu \cdot N \\ N &= w_y \Rightarrow N = (M+m)g \cdot \sigma\upsilon\eta\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \mu \cdot (M+m)g \cdot \sigma\upsilon\eta\theta.$$

Αφού το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και κατά τη μετάβαση του συσσωματώματος από το οριζόντιο στο κεκλιμένο επίπεδο δεν συμβαίνει απώλεια κινητικής ενέργειας, συμπεραίνουμε ότι το



συσσωμάτωμα στην κατώτερη θέση (1) του κεκλιμένου επιπέδου έχει αρχική ταχύτητα μέτρου v_s .

Για την κίνηση του συσσωματώματος στο κεκλιμένο επίπεδο εφαρμόζουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την κατώτερη θέση (1) έως την ανώτερη θέση (2):

$$K_{(2)} - K_{(1)} = W_w + W_T + W_N \Rightarrow -\frac{1}{2}(m+M)v_s^2 = -w_x \cdot S - T \cdot S \Rightarrow -\frac{1}{2}(m+M)v_s^2 = -w_x \cdot S - T \cdot S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)v_s^2 = (m+M)g \cdot \eta\mu\theta \cdot S + \mu(m+M)g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot S \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}v_s^2}{g \cdot \eta\mu\theta + \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \boxed{S = 0,16 \text{ m}}$$

- 5) Το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται λόγω της τριβής στο κεκλιμένο επίπεδο είναι:

$$Q = |W_T| \Rightarrow Q = \mu \cdot (m+M)g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot S \Rightarrow Q = 7,2 \text{ J}.$$

Οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{\text{βλήματος, πριν}}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{Q}{\frac{1}{2}mv_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\Pi\% = 2,5\%}.$$

- 6) Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος βλήμα-σώμα κατά την πλαστική κρούση ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_{\text{συστ}} = \Delta \vec{p}_{x'x, \text{συστ}} + \Delta \vec{p}_{y'y, \text{συστ}}.$$

$$\text{όμως } \vec{p}_{x'x, \text{συστ}} = \text{σταθ.} \Rightarrow \Delta \vec{p}_{x'x, \text{συστ}} = 0$$

$$\text{και } \Delta \vec{p}_{y'y, \text{συστ}} = \vec{p}_{y'y, \text{συστ(μετά)}} - \vec{p}_{y'y, \text{συστ(πριν)}}, \text{ με } \vec{p}_{y'y, \text{συστ(μετά)}} = 0.$$

Η ορμή του συστήματος στον άξονα $y'y$ πριν την κρούση ισούται μόνο με τη συνιστώσα της ορμής του βλήματος στον άξονα $y'y$.

$$\text{Άρα } \Delta \vec{p}_{\text{συστ}} = -\vec{p}_{y'y, \text{βλήματος(πριν)}} \Rightarrow |\Delta \vec{p}_{\text{συστ}}| = |\vec{p}_{y'y, \text{βλήματος(πριν)}}| \Rightarrow |\Delta \vec{p}_{\text{συστ}}| = mv_1 \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow \boxed{|\Delta \vec{p}_{\text{συστ}}| = 12\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}.$$

Δηλαδή η μεταβολή της ορμής του συστήματος εξαιτίας της κρούσης είναι διάνυσμα κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο με φορά από το οριζόντιο επίπεδο προς το συσσωμάτωμα.

- 7) Όταν το συσσωμάτωμα σταματήσει στιγμιαία η τριβή ολίσθησης μετατρέπεται ακαριαία σε στατική τριβή $T_{\text{στ}}$, η οποία αντιστέκεται στη συνιστώσα w_x του βάρους του συσσωματώματος, η οποία έχει την τάση να θέσει ξανά σε κίνηση το συσσωμάτωμα.

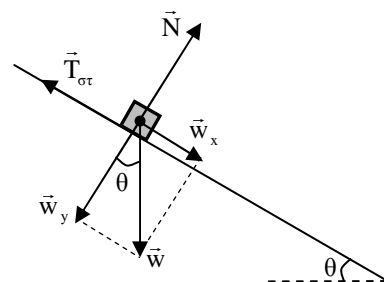
Για να επιστρέψει το συσσωμάτωμα πίσω θα πρέπει:

$$w_x > T_{\text{στ, max}}.$$

$$\text{Όμως } w_x = (m+M)g \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow w_x = 30 \text{ N και}$$

$$T_{\text{στ, max}} = \mu_{\text{σ}_{\text{max}}} \cdot (m+M)g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow T_{\text{στ, max}} = 45 \text{ N}.$$

Άρα το σώμα δεν θα επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.



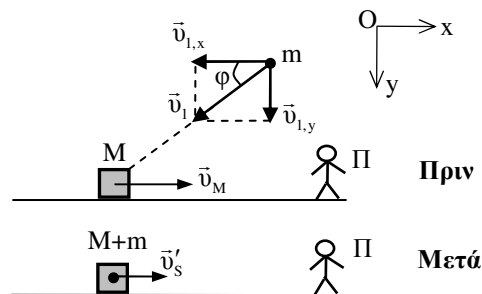
- 8) Έστω v'_s η νέα ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση. Επειδή $f_3 > f_1$ πρέπει η ηχητική πηγή (συσσωμάτωμα) να πλησιάζει τον ακίνητο παρατηρητή Π με την ταχύτητα v'_s . Τότε η συχνότητα f_3 του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, δίνεται από τη σχέση:

$$f_3 = \frac{v_{\text{ηχ}}}{v_{\text{ηχ}} - v'_s} \cdot f_1 \Rightarrow v'_s = 20 \text{ m/s}.$$

Έστω v_M η ταχύτητα του σώματος μάζας M αμέσως πριν την πλαστική κρούση. Η ορμή του συστήματος βλήμα-σώμα κατά την κρούση διατηρείται σταθερή μόνο στην οριζόντια διεύθυνση (άξονας $x'x$). Οπότε:

$$\vec{p}_{x'x(\text{πριν})} = \vec{p}_{x'x(\text{μετά})} \Rightarrow Mv_M - mv_1 \sigma\upsilon\nu\phi = (M+m)v'_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_M = \frac{(M+m)v'_s + mv_1 \sigma\upsilon\nu\phi}{M} \Rightarrow \boxed{v_M = 26,4 \text{ m/s}}.$$



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ