

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, και τα σημεία της $C_f A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_v(x_v, y_v)$, $v \in \mathbb{N}^*$ για τα οποία ισχύουν ότι οι τετμημένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 1$ και διακύμανση $s^2 = 2$, ενώ οι τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = -11$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = -12$.

β. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι και για την ένδειξη x_0 του ζαριού, φέρνουμε εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0 . Να βρεθεί η πιθανότητα η εφαπτομένη να τέμνει τον ημιάξονα Ox .

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει ότι $y_i = f(x_i)$ με $x_i = 1, 2, \dots, v$. Άρα $y_i = -x_i^2 + 4x_i + \alpha = -x_i^2 + 2x_i - 1 + 2x_i + \alpha + 1 = -(x_i - 1)^2 + 2x_i + \alpha + 1 = -(x_i - \bar{x})^2 + 2x_i + \alpha + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Επομένως: } \bar{y} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v y_i = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \left[-(x_i - \bar{x})^2 + 2x_i + \alpha + 1 \right] = -\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 + 2 \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i + \alpha + 1 \\ &\Leftrightarrow \bar{y} = -s_x^2 + 2\bar{x} + \alpha + 1 \Leftrightarrow -11 = -2 + 2 \cdot 1 + \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = -12. \end{aligned}$$

β. Για $\alpha = -12$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = -x^2 + 4x - 12$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(x_0, f(x_0))$ είναι της μορφής $(\varepsilon): y = f'(x_0)x + \beta$. Όμως το $B \in (\varepsilon)$ άρα $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Οπότε $y = (-2x_0 + 4) \cdot x + (-x_0^2 + 4x_0 - 12) - (-2x_0 + 4) \cdot x_0$ δηλαδή $(\varepsilon): y = -2(x_0 - 2) \cdot x + x_0^2 - 12$.

Η (ε) τέμνει τον ημιάξονα $x'x$ όταν $y = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - 2) \cdot x = x_0^2 - 12 \Leftrightarrow x = \frac{x_0^2 - 12}{2(x_0 - 2)}$ άρα η (ε) τέμνει τον ημιάξονα ox

στο σημείο $\Gamma\left(\frac{x_0^2 - 12}{2(x_0 - 2)}, 0\right)$, όπου $\frac{x_0^2 - 12}{2(x_0 - 2)} \geq 0$. Πίνακας πρόσημου:

x_0	$-2\sqrt{3}$			2			$2\sqrt{3}$		
$x_0^2 - 12$	+	0	-	-	0	+	+	0	+
$2(x_0 - 2)$	-	0	-	0	+	+	+	0	+
Γινόμενο	-	0	+		-	0	+	0	+

Άρα $x_0 \in [-2\sqrt{3}, 2) \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$. Ο δ.χ. του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και το ενδεχόμενο

A : "φέρνουμε x_0 " είναι $A = \{1, 4, 5, 6\}$ αφού $3 < 2\sqrt{3} < 4$. Άρα η πιθανότητα η εφαπτομένη ε να τέμνει τον

ημιάξονα Ox είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\lambda, \mu, \kappa\}$ με $\lambda \in \mathbb{Z}^*$, $\lambda \neq 1$, $P(\mu) = \frac{2}{3}P(\lambda)$ και $P(i) = \frac{1}{i}$, $i = \lambda, \mu, \kappa$.

α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = P(\lambda) \ln x + P(\mu)x^2 + x$, $x > 0$ η οποία δεν έχει ακρότατα. Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω .

β. Αν ο δ.χ. του ερωτήματος **α.** είναι $\Omega = \{2, 3, 6\}$ θεωρούμε τα σύνθετα ενδεχόμενα A , $B = \{6, \alpha\}$ με $\alpha = 2$ ή 3 . Οι παρατηρήσεις $P(A), P(A \cap B), P(A \cup B)$ και $P(\emptyset)$ έχουν διάμεσο $\delta = \frac{5}{12}$. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A , B και $A \cap B$.

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, με $f'(x) = \frac{P(\lambda)}{x} + 2P(\mu)x + 1, x > 0. f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(\lambda) + 2P(\mu)x^2 + x = 0.$$

Αφού η f δεν έχει ακρότατα η εξίσωση δεν έχει λύσεις. Άρα $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4 \cdot 2P(\mu)P(\lambda) < 0 \Leftrightarrow P(\mu)P(\lambda) > \frac{1}{8}$ αλλά

$$P(\mu) = \frac{2}{3}P(\lambda), \text{ επομένως } \frac{2}{3}P^2(\lambda) > \frac{1}{8} \Leftrightarrow P^2(\lambda) > \frac{3}{16} \Leftrightarrow |P(\lambda)| > \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow P(\lambda) < -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ ή } P(\lambda) > \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ αλλά } 0 \leq P(\lambda) \leq 1. \text{ Άρα}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < P(\lambda) \leq 1 \text{ και } P(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \text{ δηλαδή } \frac{4}{\sqrt{3}} > \lambda > 1. \text{ Επομένως } \lambda = 2. \text{ Οπότε } P(2) = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$P(\mu) = \frac{2}{3}P(2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ άρα } \mu = 3. \text{ Τότε } P(2) + P(3) + P(\kappa) = 1 \Leftrightarrow P(\kappa) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \text{ άρα } \kappa = 6. \text{ Άρα } \Omega = \{2, 3, 6\}.$$

β. Από ερώτημα **α.** για το δ.χ $\Omega = \{2, 3, 6\}$ ισχύει ότι $P(2) = \frac{1}{2}, P(3) = \frac{1}{3}, P(6) = \frac{1}{6}$. Τα A, B είναι σύνθετα ενδεχόμενα ενός

δειγματικού χώρου από 3 στοιχεία. Άρα $A \cap B \neq \emptyset$. Επίσης, για κάθε ένα από αυτά ισχύει $P(A), P(B) \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (αφού

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}). \text{ Ισχύει ότι } A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, \text{ άρα οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι}$$

$$P(\emptyset) < P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B). \text{ Τότε } \delta = \frac{P(A \cap B) + P(A)}{2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(A \cap B) + P(A) = \frac{5}{6}. (1)$$

Τότε, $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cap B) + P(A) = \frac{5}{6} < 1$ επομένως $A \neq \Omega$. Επίσης αν υποθέσουμε ότι $A = B$ τότε $A \cap B = A$ και

$$P(A \cap B) + P(A) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 2P(A) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{12} < \frac{1}{2} \text{ άτοπο. Άρα } A \neq B.$$

Επομένως, τα A και B έχουν από 2 στοιχεία και δεν είναι και τα δυο κοινά. Όμως το Ω έχει 3 στοιχεία, άρα έχουμε $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B$ απλό ενδεχόμενο.

Επιπλέον αν $A = \{2, 3\}$ τότε $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ και από τη σχέση (1) $P(A \cap B) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$ άτοπο. Το ενδεχόμενο B είναι

το $B = \{6, 2\}$ ή $B = \{6, 3\}$. Αν $B = \{6, 2\}$ τότε $A \cap B = \{2\} = B$ (άτοπο) ή $A = \{3, 6\}$ με $P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Αλλά

$$P(A) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \neq \frac{5}{6}. \text{ Αν } B = \{6, 3\} \text{ τότε } A \cap B = \{3\} = B \text{ (άτοπο) ή } A = \{6, 2\}. \text{ Άρα τελικά } A = \{6, 2\}, B = \{6, 3\} \text{ και}$$

$$A \cap B = \{6\}.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ