ΆΣΚΗΣΗ 1

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και ο μιγαδικός z του οποίου η εικόνα κινείται πάνω στη C_f. Αν για τον z ισχύει $e^{\mathrm{Im}(z)} + \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) + 1$ **(1)** τότε

i. Να βρείτε τον μιγαδικό z με το ελάχιστο μέτρο.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
iii. Αν $\mathrm{Re}(z) > 0$ τότε να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(z) < \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{2}$
iv. Αν $w = \mathrm{Im}(z) + i\,\mathrm{Re}(z)$ τότε να βρείτε σε ποια καμπύλη κινείται η εικόνα του w.
v. Αν $w \neq 0$ και $8^{\mathrm{Re}(w)} + 4^{\mathrm{Re}(w)} = 7^{\mathrm{Re}(w)} + 5^{\mathrm{Re}(w)}$ να βρείτε τον w.

ΛΥΣΗ

i. Η εικόνα του z κινείται στη C_f άρα $z = x + f(x)i,\ x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $\mathrm{Re}(z) = x$ και $\mathrm{Im}(z) = f(x)$. Οπότε :

(1) $\Leftrightarrow\ e^{f(x)} + f(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ **(2)**

Για $x = 0$ στην **(2)** : $e^{f(0)} + f(0) = 1$ **(3).**

Θεωρούμε $g(x) = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $g'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε g $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1 . Συνεπώς

(3) $\Leftrightarrow\ g(f(0)) = g(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$

Τελικά για x = 0, $z = 0 + 0i = 0$, ο οποίος έχει προφανώς ελάχιστο μέτρο.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε παραγωγίζοντας την **(2)** έχουμε:

$e^{f(x)} \cdot f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} + 1},\ x \in \mathbb{R}$ **(4).** Άρα f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγισίμων με: $f''(x) = -\dfrac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(e^{f(x)} + 1)^2} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς f κοίλη στο $\mathbb{R}$.

iii. $\mathrm{Im}(z) < \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{2} \Leftrightarrow f(x) < \dfrac{x}{2},\ x > 0$ **.** Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0, x], x>0 , άρα υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x}$.

Όμως $\xi > 0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(0) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{1}{2} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) < \dfrac{x}{2}$.

iv. Η εικόνα N(f(x), x) του w είναι συμμετρική με την εικόνα M(x, f(x)) του z ως προς την y = x. Είναι f $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα 1 – 1. Συνεπώς η εικόνα του w κινείται πάνω στην $C_{f^{-1}}$. Θα αποδειχθεί ότι $A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Έστω $y_o \in \mathbb{R}$. Αρκεί να υπάρχει $x_o \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = y_o$. Θεωρούμε $x_0 = e^{y_o} + y_0 - 1$ **(5)**. Για $x = x_0$ στην

(2) : $e^{f(x_0)} + f(x_0) = x_0 + 1 \overset{(5)}{\Leftrightarrow} e^{f(x_0)} + f(x_0) = e^{y_0} + y_0 \Leftrightarrow g(f(x_0)) = g(y_0) \overset{g\,'1-1'}{\Leftrightarrow} f(x_0) = y_0$.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στην (2): $e^x + x = f^{-1}(x) + 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = e^x + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

v. Θέτουμε $\alpha = \mathrm{Re}(w),\ \alpha \in \mathbb{R}^*$

$8^{\mathrm{Re}(w)} + 4^{\mathrm{Re}(w)} = 7^{\mathrm{Re}(w)} + 5^{\mathrm{Re}(w)} \Leftrightarrow 8^\alpha + 4^\alpha = 7^\alpha + 5^\alpha \Leftrightarrow 8^\alpha - 7^\alpha = 5^\alpha - 4^\alpha$ (5).

Θεωρούμε $h(x) = x^\alpha,\ x > 0$. Η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα [7, 8] και [4, 5] άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (7, 8)$ και $\xi_2 \in (4, 5)$ τέτοια ώστε : $f'(\xi_1) = f(8) - f(7)$ και $f'(\xi_2) = f(5) - f(4)$. Οπότε:

(5) $\Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Leftrightarrow \alpha {\xi_1}^{\alpha-1} = \alpha {\xi_2}^{\alpha-1} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} {\xi_1}^{\alpha-1} = {\xi_2}^{\alpha-1} \Leftrightarrow (\dfrac{\xi_1}{\xi_2})^{\alpha-1} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ αφού $0 < \dfrac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1$

Τελικά $\mathrm{Re}(w) = 1$. Όμως $f^{-1}(1) = e$ οπότε $w = 1 + ei$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:
$f(x)f''(x)+\lambda\left(f'(x)\right)^2=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, όπου $\lambda\in\mathbb{N},\ \lambda\geq 2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

ΛΥΣΗ

$$f(x)\cdot f''(x)+\lambda\left(f'(x)\right)^2=0 \Rightarrow (\lambda+1)\cdot f^{\lambda-1}(x)\cdot f(x)f''(x)+(\lambda+1)\cdot f^{\lambda-1}(x)\cdot\lambda\cdot\left(f'(x)\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)\cdot f^{\lambda}(x)\cdot\left(f'(x)\right)'+\left((\lambda+1)f^{\lambda}(x)\right)'\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow \left((\lambda+1)f^{\lambda}(x)\cdot f'(x)\right)'=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)f^{\lambda}(x)\cdot f'(x)=c_1 \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{\lambda+1}(x)\right)'=\left(c_1x+c_2\right)' \Leftrightarrow f^{\lambda+1}(x)=c_1x+c_2 \quad ②$$ όπου $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $c_1=0$.

Έστω $c_1\neq 0$. Για $x=\frac{-c_2}{c_1}$ στην ② έχουμε:

$$f^{\lambda+1}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)=0 \quad ③.$$

Όμως για $x=\frac{-c_2}{c_1}$ στην ① έχουμε: $(\lambda+1)f^{\lambda}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\cdot f'\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)=c_1$

$\overset{③}{\Leftrightarrow} c_1=0$ ΆΤΟΠΟ.

Τελικά από ② προκύπτει $f^{\lambda+1}(x)=c_2$, δηλαδή f σταθερή.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω f, g συνεχείς στο [α, β] (α<β)

α. Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, δείξτε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β. Αν f παραγωγίγιμη στο [0, 1] με f(0)=0 και f΄ συνεχής στο [0, 1], ότι:

i. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)\,f'(x)\,dx$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$, τέτοιο ώστε: $f'(x_0)=2\int_0^1 f(x)dx$.

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ άρα $\int_\alpha^\beta\left[f(x)-g(x)\right]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\geq 0\Leftrightarrow$
$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

β. **i.** $\int_0^1(1-x)\cdot f'(x)\,dx=\left[(1-x)\cdot f(x)\right]_0^1-\int_0^1(1-x)'\cdot f(x)\,dx=0+\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$.

ii. Η f΄ συνεχής στο [0, 1] άρα από θ μεγίστης – ελαχίστης τιμής υπάρχει $x_1,\ x_2\in[0,1]$ τέτοια ώστε $f'(x_1)$ ελάχιστο και $f'(x_2)$ μέγιστο, δηλαδή $f'(x_1)\leq f'(x)\leq f'(x_2)$ για κάθε $x\in[0,1]$, όμως $x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$ άρα $1-x\geq 0$, τότε $(1-x)\cdot f'(x_1)\leq(1-x)\cdot f'(x)\leq(1-x)\cdot f'(x_2)$
με τη βοήθεια του **α.** έχουμε $\int_0^1(1-x)\cdot f'(x_1)\,dx\leq\int_0^1(1-x)\cdot f'(x)\,dx\leq\int_0^1(1-x)\cdot f'(x_2)\,dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x_1)\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\leq\int_0^1(1-x)\cdot f'(x)\,dx\leq f'(x_2)\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\Leftrightarrow\frac{1}{2}f'(x_1)\leq\int_0^1 f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}f'(x_2)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f'(x_1)\leq 2\int_0^1 f(x)\,dx\leq f'(x_2)$, τότε αν $f'(x_1)=f'(x_2)$ έχουμε $2\int_0^1 f(x)\,dx=f'(x_1)=f'(x_2)$ άρα $x_0=x_1$ ή $x_0=x_2$. Αν $f'(x_1)\neq f'(x_2)$ τότε $f'(x_1)<2\int_0^1 f(x)\,dx<f'(x_2)$ άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=2\int_0^1 f(x)\,dx$. Τελικά υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=2\int_0^1 f(x)\,dx$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ