

Έστω ο μιγαδικός $z \neq 0$ και η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, που είναι γνησίως φθίνουσα και για την οποία ισχύει :

$$|z| \cdot f(x-1) + \left|z + \frac{2}{z}\right| \cdot f(-x) = |z| + \left|z + \frac{2}{z}\right| \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{2}{z}\right|$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\frac{1-e^x}{2}\right) < -\operatorname{Re}(z^2)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_{-2x}^0 f(t)dt + x^2 f(-x) = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

i. Από τη σχέση (1) για $x = 0$ και για $x = 1$ έχουμε αντίστοιχα :

$$|z| \cdot f(-1) + \left|z + \frac{2}{z}\right| \cdot f(0) = |z| + \left|z + \frac{2}{z}\right| \quad \text{και} \quad |z| \cdot f(0) + \left|z + \frac{2}{z}\right| \cdot f(-1) = |z| + \left|z + \frac{2}{z}\right|$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων βρίσκουμε :

$$|z| \cdot f(-1) + \left|z + \frac{2}{z}\right| \cdot f(0) - |z| \cdot f(0) - \left|z + \frac{2}{z}\right| \cdot f(-1) = 0 \Leftrightarrow |z| \cdot (f(-1) - f(0)) - \left|z + \frac{2}{z}\right| \cdot (f(-1) - f(0)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(-1) - f(0)) \cdot \left(|z| - \left|z + \frac{2}{z}\right|\right) = 0 \quad (2)$$

$$\stackrel{f \downarrow}{-1 < 0} \Leftrightarrow f(-1) > f(0) \Leftrightarrow f(-1) - f(0) > 0.$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $|z| - \left|z + \frac{2}{z}\right| = 0 \Leftrightarrow |z| = \left|z + \frac{2}{z}\right|$.

ii. $|z| = \left|z + \frac{2}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2 = \left|z + \frac{2}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{2}{z}\right) \cdot \left(\bar{z} + \frac{2}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{2z}{\bar{z}} + \frac{2\bar{z}}{z} + \frac{4}{z\bar{z}} \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $z^2 + \overline{(z^2)} = -2 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z^2) = -2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -1.$

Η σχέση (1) λόγω του i. γίνεται : $|z| \cdot f(x-1) + |z| \cdot f(-x) = |z| + |z| \stackrel{|z| \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x-1) + f(-x) = 2 \quad (3)$

Για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$

$$f\left(\frac{1-e^x}{2}\right) < -\operatorname{Re}(z^2) \Leftrightarrow f\left(\frac{1-e^x}{2}\right) < 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1-e^x}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} \frac{1-e^x}{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-e^x > -1 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2.$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 1 - \int_{-2x}^0 f(t)dt - x^2 f(-x) = 1 + \int_0^{-2x} f(t)dt - x^2 f(-x).$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$h(0) = 1 + \int_0^0 f(t)dt - 0f(0) = 1 > 0.$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \int_0^{-1} f(t)dt - \frac{1}{4}f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \int_{-1}^0 f(t)dt - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4} - \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

Από τη σχέση (3) έχουμε :

$$\int_0^1 (f(x-1) + f(-x))dx = \int_0^1 2dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x-1)dx + \int_0^1 f(-x)dx = 2 \quad \begin{matrix} (u=x-1 \text{ για το } 1^{\circ} \text{ ολοκλ.}) \\ \Leftrightarrow \\ (u=-x \text{ για το } 2^{\circ} \text{ ολοκλ.}) \end{matrix}$$

$$\int_{-1}^0 f(u)du + \int_0^{-1} f(u)(-du) = 2 \Leftrightarrow 2 \int_{-1}^0 f(u)du = 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(u)du = 1.$$

Άρα $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$, οπότε $h(0)h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

Επομένως (Θ. Bolzano) η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει :

$2f(x) \geq x + f(a) + f(-a)$ (1), για κάθε $x \in \mathbf{R}$ με $a > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-a, a)$, ώστε $2f(\xi) = a + 2f(-a)$
- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-a, a)$, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 1$
- η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-a, a)$.

ΛΥΣΗ

- i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2f(x) - a - 2f(-a)$, $x \in [-a, a]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-a, a]$ και $g(-a)g(a) = [2f(-a) - a - 2f(-a)] \cdot [2f(a) - a - 2f(-a)] = -a \cdot [2f(a) - f(-a)] - a$.

Από τη σχέση (1) για $x = a$ έχουμε $2f(a) \geq a + f(a) + f(-a) \Leftrightarrow f(a) - f(-a) \geq a$.

Από τη σχέση (1) για $x = -a$ έχουμε $2f(-a) \geq -a + f(a) + f(-a) \Leftrightarrow f(a) - f(-a) \leq a$.

Από τις δύο προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι $f(a) - f(-a) = a$. (2)

Οπότε $g(-a)g(a) = -a(2a - a) = -a^2 < 0$. Επομένως με βάση το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-a, a)$, ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi) - a - 2f(-a) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi) = a + 2f(-a)$.

- ii. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[-a, 0]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_1 \in (-a, 0)$, ώστε $f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-a)}{0 - (-a)} = \frac{f(0) - f(-a)}{a}$.

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0, a]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_2 \in (0, a)$, ώστε $f'(x_2) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{f(a) - f(0)}{a}$.

Άρα $f'(x_1) + f'(x_2) = \frac{f(0) - f(-a)}{a} + \frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{f(a) - f(-a)}{a} \stackrel{(2)}{=} \frac{a}{a} = 1$.

- iii. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[-a, a]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (-a, a)$, ώστε $f'(x_0) = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} \stackrel{(2)}{=} \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ από τη σχέση (1) έχουμε $2f(x) - x - f(a) - f(-a) \geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2f(x) - x - f(a) - f(-a)$, οπότε η προηγούμενη ανισότητα γράφεται $\varphi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Είναι $\varphi(-a) = 2f(-a) + a - f(a) - f(-a) = a - [f(a) - f(-a)] \stackrel{(2)}{=} a - a = 0$

και $\varphi(a) = 2f(a) - a - f(a) - f(-a) = -a + f(a) - f(-a) \stackrel{(2)}{=} a - a = 0$.

Άρα φ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -a$ και για $x = a$ και αφού είναι παραγωγίσιμη με

$\varphi'(x) = 2f'(x) - 1$ από (Θ. Fermat), έχουμε

$\varphi'(-a) = 0$ και $\varphi'(a) = 0 \Leftrightarrow 2f'(-a) - 1 = 0$ και $2f'(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(-a) = f'(a) = \frac{1}{2}$.

Άρα $f'(-a) = f'(x_0) = f'(a) = \frac{1}{2}$. (3)

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και λόγω της (3), ισχύουν για την f' οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στα διαστήματα $[-a, x_0]$, $[x_0, a]$. Άρα η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-a, x_0)$ και τουλάχιστον μια ρίζα στο (x_0, a) .

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ