

Άσκηση 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sin x$.

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

B. Αν είναι γνωστό ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε:

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο $A(\pi, f^{-1}(\pi))$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ και ότι η f^{-1} είναι κοίλη στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$.

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , την εφαπτομένη της (ε) και τις ευθείες $x = \pi$ και $x = 3\pi$.

Λύση

A. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 - \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$. Άρα, από κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως το σύνολο τιμών της είναι: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Έτσι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι: $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

B. i. Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$. Η $f^{-1}(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων επομένως ισχύει: $(f^{-1}(f(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ (1).

Παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \pi$ άρα $f^{-1}(\pi) = \frac{\pi}{2}$. Επίσης $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$.

Έτσι, για $x = \frac{\pi}{2}$, από την σχέση (1) έχουμε: $(f^{-1})'\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(\pi) = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο $A(\pi, f^{-1}(\pi))$ είναι:

$$y - f^{-1}(\pi) = (f^{-1})'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y - \frac{\pi}{2} = 1 \cdot (x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \frac{\pi}{2}.$$

ii. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ισχύουν: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 3\pi$.

$$\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \pi \leq f(x_1) < f(x_2) \leq 3\pi.$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} > \frac{1}{f'(x_2)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (f^{-1})'(f(x_1)) > (f^{-1})'(f(x_2)).$$

Άρα η $(f^{-1})'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$ οπότε η f^{-1} είναι κοίλη στο $[\pi, 3\pi]$.

iii. Αφού η f^{-1} είναι κοίλη στο $[\pi, 3\pi]$ η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε όλο

το διάστημα $[\pi, 3\pi]$. Δηλαδή ισχύει $f^{-1}(x) \leq x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\pi, 3\pi]$.

$$E(\Omega) = \int_{\pi}^{3\pi} \left| f^{-1}(x) - x + \frac{\pi}{2} \right| dx = \int_{\pi}^{3\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \right) dx = \int_{\pi}^{3\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx - \int_{\pi}^{3\pi} f^{-1}(x) dx.$$

$$I_1 = \int_{\pi}^{3\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} \right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{9\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} = 3\pi^2.$$

$$I_2 = \int_{\pi}^{3\pi} f^{-1}(x) dx. \text{ Θέτω } f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u). \text{ Τότε } dx = f'(u) du, u_1 = f^{-1}(\pi) = \frac{\pi}{2}, u_2 = f^{-1}(3\pi) = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Άρα } I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} u f'(u) du = [u f(u)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(u) du = \frac{3\pi}{2} f\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2u + \sin u) du = \dots = 2\pi^2 + 2.$$

$$\text{Επομένως } E(\Omega) = I_1 - I_2 = 3\pi^2 - (2\pi^2 + 2) = \pi^2 - 2 \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 2

Έστω η κυρτή συνάρτηση $F(x) = \int_{\kappa}^x (e^{t^2} - f(t)) dt$, $x \in \Delta = [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \kappa < \beta$ όπου f συνεχής.

α. Να δείξετε ότι η F δεν έχει μέγιστο σε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$

β. Να δείξετε ότι $F'(\alpha) \leq 0$ ή $F'(\beta) \geq 0$

γ. Αν $x^2 \geq f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ και $F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\beta^3}{3} + \int_{\alpha}^{\beta} e^{t^2} dt$, να δείξετε ότι $f(x) = x^2$

Λύση

α. Έστω ότι η F έχει μέγιστο στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τότε ισχύει $F(x) \leq F(x_0)$ **(1)** για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Η συνάρτηση $e^{t^2} - f(t)$ είναι συνεχής στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ . Αφού η $F(x)$ έχει μέγιστο στο εσωτερικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τότε από θεώρημα Fermat $F'(x_0) = 0$ και η εφαπτομένη της C_F στο x_0 είναι η $y = F(x_0)$.

Επειδή η $F(x)$ είναι κυρτή στο Δ , η εφαπτομένη είναι κάτω από την γραφική παράσταση της F άρα $F(x) \geq F(x_0)$ **(2)** για κάθε $x \in \Delta$. Από **(1)** και **(2)** έχουμε ότι $F(x) = F(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$ άτοπο γιατί η F είναι κυρτή.

β. Η $F(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα παίρνει μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$. Από ερώτημα **α.** η F δεν έχει μέγιστο σε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ άρα η F παρουσιάζει μέγιστο στο α ή στο β .

Αν η F έχει μέγιστο στο $x_0 = \alpha$. Τότε $F(x) \leq F(\alpha) \Leftrightarrow F(x) - F(\alpha) \leq 0$. Για $x > \alpha$ έχουμε ότι $\frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0$ άρα

και $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0 \Leftrightarrow F'(\alpha) \leq 0$. Όμοια δείχνουμε ότι αν η F έχει μέγιστο στο β τότε $F'(\beta) \geq 0$.

γ. Έχουμε $F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\beta^3}{3} + \int_{\alpha}^{\beta} e^{t^2} dt \Leftrightarrow \int_{\kappa}^{\beta} (e^{t^2} - f(t)) dt - \int_{\kappa}^{\alpha} (e^{t^2} - f(t)) dt = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} e^{t^2} dt \Leftrightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (e^{t^2} - f(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (-t^2 + e^{t^2}) dt \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (e^{t^2} - f(t) + t^2 - e^{t^2}) dt = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - f(t)) dt = 0 \text{ **(3)** .}$$

Έχουμε ότι $x^2 \geq f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = x^2 - f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Έστω ότι η $g(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - f(t)) dt > 0 \text{ άτοπο από **(3)** . Άρα } g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ