

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να δείξετε ότι είναι περιττή.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και να δείξετε ότι για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f της μορφής $y = ax + \beta$.
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda x$ για τις διάφορες τιμές του λ .

Λύση

- Η e^{-x^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = e^{-x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για τη δεύτερη παράγωγο έχουμε $f''(x) = -2xe^{-x^2}$.
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0$
 άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ και το 0 είναι θέση σημείου καμπής και $f(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$, δηλαδή το $O(0,0)$ είναι το σημείο καμπής της C_f .
 $f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt \stackrel{u=-t}{=} -\int_0^x e^{-u^2} du = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή.
- Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ και αφού $f'(0) = e^0 = 1$, είναι $\varepsilon: y = x$.
 Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο τυχαίο σημείο x_0 είναι $f'(x_0) = e^{-x_0^2}$, άρα έχουμε $f'(x_0) = a \Leftrightarrow e^{-x_0^2} = a \Leftrightarrow x_0^2 = -\ln a$ που έχει λύση για κάθε $a \in (0, 1)$ αφού $a < 1 \Leftrightarrow -\ln a > 0$.
- Για την εξίσωση $f(x) = \lambda x$, παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda x$, οπότε η εξίσωση γίνεται $g(x) = 0$. Η g είναι περιττή συνάρτηση αφού $g(-x) = f(-x) + \lambda x = -f(x) + \lambda x = -(f(x) - \lambda x) = -g(x)$, άρα θα μελετήσω τις λύσεις μόνο στο $(0, +\infty)$. Η g παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $g'(x) = f'(x) - \lambda = e^{-x^2} - \lambda$.
 Αν $\lambda \leq 0$, έχουμε $g'(x) > 0$, άρα η g γνησίως αύξουσα, οπότε το 0 είναι η μοναδική ρίζα της g .
 Αν $\lambda \geq 1$, $g'(x) = e^{-x^2} - \lambda$, άρα $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \geq \lambda \Leftrightarrow -x^2 \geq \ln \lambda \geq 0$, αδύνατο για $x > 0$, άρα, έχουμε $g'(x) < 0$, δηλαδή η g γνησίως φθίνουσα, οπότε το 0 είναι η μοναδική ρίζα της g .
 Αν $\lambda \in (0, 1)$ τότε για $x > 0$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} = \lambda \Leftrightarrow x^2 = -\ln \lambda \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln \frac{1}{\lambda}}$, ο πίνακας μεταβολών της g είναι

x	0	$\sqrt{\ln \frac{1}{\lambda}}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		↗	↘

Έχουμε η g γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \sqrt{\ln \frac{1}{\lambda}}\right]$, άρα για $x \in \left(0, \sqrt{\ln \frac{1}{\lambda}}\right]$, $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$, άρα η g δεν έχει ρίζα στο $\left(0, \sqrt{\ln \frac{1}{\lambda}}\right]$, δηλαδή έχει το πολύ μία στο $(0, +\infty)$. Από ερώτημα (i), η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της. Έτσι, από (ii) υπάρχει εφαπτομένη της C_f της μορφής $y = ax + \beta$ με $a < \lambda$. Έτσι, $g(x) = f(x) - \lambda x < ax + \beta - \lambda x = (a - \lambda)x + \beta$. Όμως $\lim_{x \rightarrow \infty} [(a - \lambda)x + \beta] = -\infty$, άρα υπάρχει $x_1 > 0 : g(x_1) < 0$. Οπότε για $x_2 \in \left(0, \sqrt{\ln \frac{1}{\lambda}}\right]$, η g ικανοποιεί το Θ. Bolzano στο $[x_2, x_1]$, οπότε η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_2, x_1) . Τελικά, η g έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή είναι περιττή και το 0 είναι ρίζα, άρα έχει 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f'(x) < (2-x)f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1). Αν η ευθεία $\varepsilon: y = -3x + 7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τέμνει τη C_f στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2, x_2 = 3$, τότε

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} .

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(x^2 - 1)) < 2$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + \eta\mu(e^x + x) + 2016x^2}{x^2f(x) + 3x^3 - 6x^2}$.

iv. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = -1$.

Λύση

i. Η (1) ισοδύναμα γίνεται: $-(2-x)f''(x) + f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)f''(x) + (x-2)f'(x) < 0 \Leftrightarrow ((x-2)f'(x))' < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = (x-2)f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, με $\varphi(2) = 0$. Οπότε έχουμε για $x > 2 \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(2) \Leftrightarrow (x-2)f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, αφού $x > 2$, ενώ για $x < 2 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(2) \Leftrightarrow (x-2)f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, αφού $x < 2$. Η (1) για $x = 2$ γίνεται $f'(2) < 0$, άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1, άρα ορίζεται η f^{-1} .

ii. Έστω $A(2, f(2)), B(3, f(3))$ τα σημεία τομής της C_f με την (ε) . Τότε $f(2) = -3 \cdot 2 + 7 = 1 \Leftrightarrow 2 = f^{-1}(1)$ και

$f(3) = -3 \cdot 3 + 7 = -2 \Leftrightarrow 3 = f^{-1}(-2)$. Επίσης, για κάθε $x_1, x_2 \in f(\mathbb{R})$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$ άρα η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε έχουμε $f^{-1}(3 + f(x^2 - 1)) < 2 \Leftrightarrow f^{-1}(3 + f(x^2 - 1)) < f^{-1}(1) \Leftrightarrow 3 + f(x^2 - 1) > 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 1) > -2 \Leftrightarrow f(x^2 - 1) > f(3) \Leftrightarrow x^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

iii. Για $x > 0$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + \eta\mu(e^x + x) + 2016x^2}{x^2f(x) + 3x^3 - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \eta\mu(e^x + x) + 2016 \right)}{x^2 (f(x) + 3x - 6)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \eta\mu(e^x + x) + 2016}{f(x) + 3x - 6} \quad (2).$$

Αφού η (ε) είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x) = 7$. Ακόμη,

$$\left| \frac{1}{x^2} \eta\mu(e^x + x) \right| = \frac{1}{x^2} |\eta\mu(e^x + x)| \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \eta\mu(e^x + x) \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \text{από κριτήριο}$$

παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \eta\mu(e^x + x) \right) = 0$.

$$\text{Επομένως η (2) γίνεται } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + \eta\mu(e^x + x) + 2016x^2}{x^2f(x) + 3x^3 - 6x^2} = \frac{-3 + 0 + 2016}{7 - 6} = 2013.$$

iv. Από (i) ισχύει ότι $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι f, f' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[2, 3]$. Είναι $f(2) \cdot f(3) = 1 \cdot (-2) = -2 < 0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f(x_0) = 0$ και αφού η f είναι 1-1, αυτό είναι μοναδικό.

Επιπλέον, η f πληροί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα $[2, x_0], [x_0, 3]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2, x_0)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0 - 2} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{-1}{x_0 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = 2 - x_0 \quad \text{και ένα } \xi_2 \in (x_0, 2)$$

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x_0)}{3 - x_0} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{-2}{3 - x_0} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(\xi_2)} = x_0 - 3. \quad \text{Οπότε } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = 2 - x_0 + x_0 - 3 = -1.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ