ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω g παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ με $g(x) > f(x)$ όπου $f(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt$, $\forall x \in [1,\ +\infty)$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$

ii. Δείξτε ότι $g(x) > 0,\ \forall x \in [1,\ +\infty)$.

iii. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε $\frac{f(x)}{x} = \frac{\int_1^x \frac{g(t)}{t}dt}{x}$, $x \in [1,\ +\infty)$. Η $\frac{g(t)}{t}$ συνεχής στο $[1,\ +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών άρα η $\int_1^x \frac{g(t)}{t}dt$ παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$. Επομένως $\frac{f(x)}{x}$ παραγωγίζεται στο $[1,\ +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(\frac{\int_1^x \frac{g(t)}{t}dt}{x}\right)' = \frac{\frac{g(x)}{x}\cdot x - \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt}{x^2} = \frac{g(x) - \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt}{x^2} = \frac{g(x) - f(x)}{x^2} > 0,$$ διότι $g(x) > f(x)$

Επομένως η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

ii. Από **(i)** έχουμε $\forall x \geq 1$ ότι $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(1)}{1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \geq 0$ άρα $f(x) \geq 0$. Όμως $g(x) > f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1,\ +\infty)$ άρα $g(x) > 0$.

iii. Από **(i)** ισχύει $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' > 0$ άρα $\frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot x - f(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot x > f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(x)}{x}$, $\forall\ x \in [1,\ +\infty)$. Όμως $\frac{f(x)}{x} \geq 0$ άρα $f'(x) > 0,\ \ \forall\ x \in [1,\ +\infty)$.

Η $f(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt$ παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ άρα και στο $[1, \kappa]$, $\kappa \leq x$, άρα από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_0 \in (1, \kappa)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\kappa) - f(1)}{\kappa - 1}$, δηλαδή $f'(x_0) = \frac{f(\kappa)}{\kappa - 1}$ $\Leftrightarrow f(\kappa) = (\kappa-1)\cdot f'(x_0)$ $\Leftrightarrow \int_1^\kappa \frac{g(t)}{t}dt = (\kappa-1)\cdot f'(x_0)$ ή $\int_1^x \frac{g(t)}{t}dt = (x-1)\cdot f'(x_0)$ άρα $g(x) > (x-1)\cdot f'(x_0)$, όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\cdot f'(x_0) = +\infty$ γιατί $f'(x_0) > 0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$

α. Αν $f(x) \geq g(x)$, $\forall\ x \in [\alpha, \beta]$, δείξτε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0)=0$ και f' συνεχής στο $[0, 1]$, τότε:

i. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)\, f'(x)\, dx$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 2\int_0^1 f(x)dx$.

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0,\ \forall\ x \in [\alpha,\ \beta]$ άρα $\int_\alpha^\beta f(x)\text{-}g(x)\ dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\ dx\text{-}\int_\alpha^\beta g(x)\ dx \geq 0 \Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)\ dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\ dx$

β. i. $\int_0^1 (1\text{-}x)\cdot f'(x)\ dx = (1\text{-}x)\cdot f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1\text{-}x)'\cdot f(x)\ dx = 0 + \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx$.

ii. Η f' συνεχής στο $[0,\ 1]$ άρα από Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής $\exists\ x_1,\ x_2 \in [0,\ 1]$ τέτοια ώστε $f'(x_1)$ ελάχιστο και $f'(x_2)$ μέγιστο, δηλαδή $f'(x_1) \leq f'(x) \leq f'(x_2),\ \forall\ x \in [0,\ 1]$, όμως $x \in [0,\ 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ άρα $1\text{-}x \geq 0$, τότε $(1\text{-}x)\cdot f'(x_1) \leq (1\text{-}x)\cdot f'(x) \leq (1\text{-}x)\cdot f'(x_2)$

με τη βοήθεια του **α.** έχουμε $\int_0^1 (1\text{-}x)\cdot f'(x_1)\ dx \leq \int_0^1 (1\text{-}x)\cdot f'(x)\ dx \leq \int_0^1 (1\text{-}x)\cdot f'(x_2)\ dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x_1)\left[x\text{-}\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \leq \int_0^1 (1\text{-}x)\cdot f'(x)\ dx \leq f'(x_2)\left[x\text{-}\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \overset{\beta.i.}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}f'(x_1) \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{1}{2}f'(x_2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f'(x_1) \leq 2\int_0^1 f(x)\ dx \leq f'(x_2)$, τότε αν $f'(x_1) = f'(x_2)$ έχουμε $2\int_0^1 f(x)\ dx = f'(x_1) = f'(x_2)$

άρα $x_0 = x_1$ ή $x_0 = x_2$. Αν $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ τότε $f'(x_1) < 2\int_0^1 f(x)\ dx < f'(x_2)$ άρα από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in (0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2\int_0^1 f(x)\,dx$. Τελικά υπάρχει $x_0 \in [0,\ 1]$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2\int_0^1 f(x)\ dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $f(x\cdot y) = xf(y) + yf(x)$ ① $\forall x, y > 0$ και $f'(1) = 1$.

i. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

ii. Βρείτε τον τύπο της f

iii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μοναδική ρίζα

Λ Υ Σ Η

i. Από την σχέση ① για $x = y = 1$ έχουμε: $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1} = 1$$

Έστω $x_o \in (0, +\infty)$ τυχαίο. Τότε $\forall x \neq x_o$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x_o\frac{x}{x_o})-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{x_o f(\frac{x}{x_o})+\frac{x}{x_o}f(x_o)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{x_o f(\frac{x}{x_o})+f(x_o)(\frac{x}{x_o}-1)}{x-x_o} =$$

$$= \frac{x_o f(\frac{x}{x_o})+f(x_o)(\frac{x-x_o}{x_o})}{x-x_o} = \frac{x_o f(\frac{x}{x_o})}{x-x_o} + \frac{f(x_o)}{x_o}.$$

Έστω $\frac{x}{x_o} = u \Leftrightarrow x = x_o\cdot u$, όταν $x \to x_o$ το $u \to 1$. Άρα:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{x_o f(\frac{x}{x_o})}{x-x_o} = \lim_{u\to1}\left[x_o\frac{f(u)}{x_o u - x_o}\right] = \lim_{u\to1}\left[x_o\frac{f(u)}{x_o(u-1)}\right] = \lim_{u\to1}\frac{f(u)}{u-1} = 1 \text{ και } \lim_{x\to x_o}\frac{f(x_o)}{x_o} = \frac{f(x_o)}{x_o}.\text{ Άρα}$$

$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = 1+\frac{f(x_o)}{x_o}$ δηλαδή $f'(x_o) = 1+\frac{f(x_o)}{x_o}$ ή $f'(x) = 1+\frac{f(x)}{x},\quad x > 0$

ii. $f'(x)=1+\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)=x+f(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\ln x + c$

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 0$ άρα $c = 0$ τότε $\dfrac{f(x)}{x}=\ln x \Leftrightarrow f(x)=x\ln x$

iii. Έστω $g(x)=f(x)-x+1=x\ln x - x+1,\ \ x>0$ παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$ άρα προφανής ρίζα η $x = 1$

$\forall x>0$ έχουμε $g'(x)=\ln x+1-1=\ln x$

$\forall x>1$ έχουμε $\ln x>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$

$\forall x<1$ έχουμε $\ln x<0 \Leftrightarrow g'(x)<0$.

Άρα:

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

Τότε $\forall x>0,\quad g(x)\geq g(1) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$

δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 1.

Άρα η ρίζα x = 1 είναι μοναδική.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ