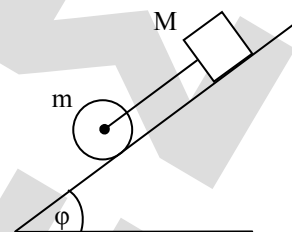


ΑΣΚΗΣΗ

Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας $m = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ , με $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\varphi = 0,8$. Κύβος μάζας $M = 2 \text{ kg}$ συνδέεται με τον άξονα του κυλίνδρου μέσω τεντωμένου αβαρούς και μη εκτατού νήματος, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η διεύθυνση του νήματος είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.



- Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο και να υπολογίσετε την κοινή επιτάχυνση του κέντρου μάζας των δύο σωμάτων.
- Να υπολογίσετε τη στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$.
- Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου λόγω στροφικής κίνησης, τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία η ταχύτητα του κύβου είναι $v_2 = 6 \text{ m/s}$.
- Να υπολογίσετε το ποσό θερμότητας λόγω τριβής που έχει παραχθεί έως τη χρονική στιγμή t_2 .
Τη χρονική στιγμή t_2 , κόβουμε ακαριαία το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα, οπότε ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Να υπολογίσετε:
- Τις νέες επιταχύνσεις των δύο σωμάτων μετά το κόψιμο του νήματος.
- Τη χρονική στιγμή t_3 κατά την οποία η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου γίνεται διπλάσια από την ταχύτητα του κύβου.
- Το συνολικό πλήθος των περιστροφών του κυλίνδρου μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 .
- Το λόγο της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου προς την κινητική ενέργεια του κύβου τη χρονική στιγμή t_3 .

Να θεωρήσετε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με το μέγιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων και του κεκλιμένου επιπέδου, δηλαδή $\mu_{ολ} = \mu_{στ,max} = \frac{9}{16}$ και ότι ο άξονας περιστροφής του κυλίνδρου είναι διαρκώς κάθετος στο νήμα και μετακινείται παράλληλα στον εαυτό του.

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, $I = \frac{1}{2} mR^2$.

ΛΥΣΗ

- Έστω a η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και $\alpha_{γων}$ η γωνιακή του επιτάχυνση. Αν ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, τότε το σημείο επαφής του με το κεκλιμένο επίπεδο θα έχει μηδενική ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι $a = \alpha_{γων} \cdot R$ και η τριβή που αναπτύσσεται είναι στατική, με τιμή μικρότερη ή ίση από την οριακή στατική τριβή T_{op} .

Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις βάρους (mg), τάση νήματος (T_1), κάθετη αντίδραση του επιπέδου (N_1) και στατική τριβή ($T_{στ}$). Η φορά της στατικής τριβής είναι προς τα πάνω ώστε να επιτυγχάνεται η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

Για τον κύλινδρο ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = mg \sigma\upsilon\eta\varphi \Rightarrow N_1 = 16 \text{ N}$

και η οριακή στατική τριβή είναι: $T_{op} = \mu_{στ,max} N_1 \Rightarrow T_{op} = 9 \text{ N}$.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική και την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - T_1 - T_{στ} = ma \quad \text{①}$$

$$\text{και } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow T_{στ} R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a}{R} \Rightarrow T_{στ} = \frac{1}{2} ma \quad \text{②}$$

$$\text{Από ① και ② έχουμε: } mg\eta\mu\varphi - T_1 = \frac{3}{2} ma \Rightarrow T_1 = mg\eta\mu\varphi - \frac{3}{2} ma \quad \text{③}$$

Στον κύβο ασκούνται οι δυνάμεις βάρους (Mg), τάση νήματος (T_2), κάθετη αντίδραση του επιπέδου (N_2) και τριβή ολίσθησης ($T_{ολ}$). Αφού το νήμα είναι τεντωμένο και μη εκτατό, ο κύβος έχει την ίδια επιτάχυνση, με την επιτάχυνση a του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Για τον κύβο ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = Mg \sigma\upsilon\eta\varphi \Rightarrow N_2 = 16 \text{ N}$

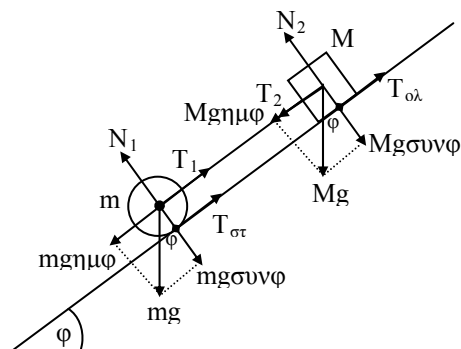
Η τριβή ολίσθησης που δέχεται ο κύβος είναι: $T_{ολ} = \mu_{ολ} N_2 \Rightarrow T_{ολ} = 9 \text{ N}$.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κύβου έχουμε:

$$\Sigma F_x = Ma \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi + T_2 - T_{ολ} = Ma \Rightarrow T_2 = Ma + T_{ολ} - Mg\eta\mu\varphi \quad \text{④}$$

Αφού το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, οι τάσεις T_1 και T_2 έχουν ίσα μέτρα, οπότε από ③ και ④ έχουμε:

$$T_2 = T_1 \Rightarrow Ma + T_{ολ} - Mg\eta\mu\varphi = mg\eta\mu\varphi - \frac{3}{2} ma \Rightarrow a = \frac{Mg\eta\mu\varphi - T_{ολ} + mg\eta\mu\varphi}{M + \frac{3}{2}m} \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2.$$



Τότε $\hat{\tau} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 3 \text{ N} < T_{\sigma\rho}$, άρα ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

- β. Η συνολική ροπή που δέχεται ο κύλινδρος είναι σταθερή άρα από τη γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου για τη στροφική κίνηση προκύπτει:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow dL = \Sigma \tau \cdot dt \Rightarrow \Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t \Rightarrow L_1 - 0 = T_{\sigma\tau} \cdot R \cdot t_1 \Rightarrow L_1 = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

- γ. Αφού το νήμα είναι τεντωμένο και μη εκτατό, ο κύβος έχει την ίδια στιγμιαία ταχύτητα v , με τη στιγμιαία ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, λόγω στροφικής κίνησης, τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει:

$$\frac{dK_{\sigma\tau}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau}}{dt} = \frac{\Sigma \tau \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau}}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega_2 \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau}}{dt} = T_{\sigma\tau} \cdot R \cdot \omega_2 \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau}}{dt} = T_{\sigma\tau} \cdot v_2 \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau}}{dt} = 18 \text{ J/s}.$$

- δ. Το ποσό θερμότητας που παράγεται λόγω τριβής, ισούται κατά απόλυτη τιμή με το έργο της τριβής ολίσθησης που δέχεται ο κύβος. Δηλαδή:

$$Q = |W_{T_{\sigma\lambda}}| \Rightarrow Q = |T_{\sigma\lambda} \cdot x_2 \cdot \sin 180^\circ| \Rightarrow Q = T_{\sigma\lambda} \cdot x_2 \quad \textcircled{5}$$

$$\text{όπου } T_{\sigma\lambda} = 9 \text{ N και } x_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} a \left(\frac{v_2}{a} \right)^2 \Rightarrow x_2 = 6 \text{ m}.$$

$$\text{Αρα } \textcircled{5} \Rightarrow Q = 54 \text{ J}.$$

- ε. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Έστω a_1 η νέα επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, a_2 η νέα επιτάχυνση του κύβου και $a'_{\gamma\omega\nu}$ η νέα γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της μηχανικής για τη μεταφορική και την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow m g \eta \mu \varphi - T'_{\sigma\tau} = m a_1 \quad \textcircled{6}$$

$$\text{και } \Sigma \tau = I \cdot a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'_{\sigma\tau} R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_1}{R} \Rightarrow T'_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} m a_1 \quad \textcircled{7}$$

Από $\textcircled{6}$ και $\textcircled{7}$ έχουμε:

$$m g \eta \mu \varphi = \frac{3}{2} m a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} g \eta \mu \varphi \Rightarrow a_1 = 4 \text{ m/s}^2.$$

Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κύβου έχουμε:

$$\Sigma F_x = M a_2 \Rightarrow M g \eta \mu \varphi - T_{\sigma\lambda} = M a_2 \Rightarrow M g \eta \mu \varphi - \mu M g \sigma \nu \varphi = M a_2 \Rightarrow a_2 = g \eta \mu \varphi - \mu g \sigma \nu \varphi \Rightarrow a_2 = 1,5 \text{ m/s}^2.$$

- ζ. Μετά το κόψιμο του νήματος, ο κύβος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $v_2 = 6 \text{ m/s}$ και εξίσωση ταχύτητας $v_M = v_2 + a_2 \Delta t$, όπου Δt χρονική διάρκεια της νέας κίνησης και το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση με αρχική ταχύτητα $v_2 = 6 \text{ m/s}$ και εξίσωση ταχύτητας $v_m = v_2 + a_1 \Delta t$

$$\text{Οπότε για } v_m = 2v_M \Rightarrow 6 + 4\Delta t = 2(6 + 1,5\Delta t) \Rightarrow \Delta t = 6 \text{ s}.$$

$$\text{Αρα } t_3 = t_2 + \Delta t \Rightarrow t_3 = \frac{v_2}{a} + \Delta t \Rightarrow t_3 = 8 \text{ s}.$$

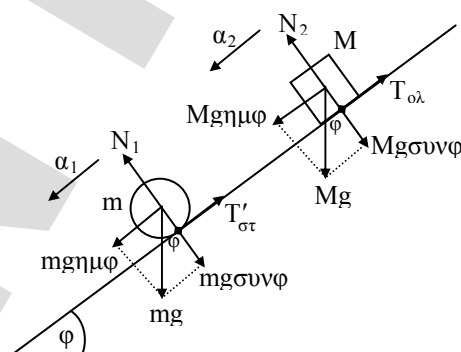
- η. Η συνολική μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} a t_2^2 + \left(v_2 \Delta t + \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2 \right) \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} a \left(\frac{v_2}{a} \right)^2 + \left(v_2 \Delta t + \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2 \right) \Rightarrow \Delta x = 114 \text{ m}.$$

$$\text{Το πλήθος των περιστροφών είναι: } N = \frac{\Delta x}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{285}{\pi} \text{ περιστροφές}.$$

- θ. Τη χρονική στιγμή t_3 ο κύβος έχει ταχύτητα $v_M = v_2 + a_2 \Delta t \Rightarrow v_M = 15 \text{ m/s}$, το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα $v_m = v_2 + a_1 \Delta t \Rightarrow v_m = 30 \text{ m/s}$ και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου είναι $\omega = \frac{v_m}{R} \Rightarrow \omega = 150 \text{ rad/s}$.

$$\text{Ο ζητούμενος λόγος είναι: } \frac{K_m}{K_M} = \frac{\frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}{\frac{1}{2} M v_M^2} \Rightarrow \frac{K_m}{K_M} = \frac{m v_m^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2}{M v_M^2} \Rightarrow \frac{K_m}{K_M} = 6.$$



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ANNA
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΡΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ