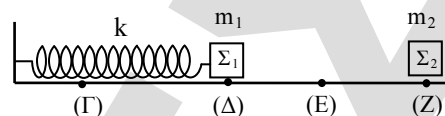


## ΑΣΚΗΣΗ

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 1 \text{ kg}$  που ισορροπεί δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 100 \text{ N/m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Σε απόσταση  $(\Delta Z)$  από το σώμα  $\Sigma_1$  ισορροπεί σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2$ . Το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο. Απομακρύνουμε το σώμα  $\Sigma_1$  από τη θέση ισορροπίας του κατά  $(\Gamma\Delta) = 0,2 \text{ m}$  και τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το αφήνουμε ελεύθερο.



Την ίδια στιγμή εκτοξεύουμε το σώμα  $\Sigma_2$  από το σημείο Ζ προς το σώμα  $\Sigma_1$  με οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $u_2$ , η οποία έχει τη διεύθυνση του ελατηρίου. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά στη θέση Ε. Αμέσως μετά την

κρούση η ταχύτητα του σώματος  $\Sigma_1$  μηδενίζεται στιγμιαία. Δίνονται οι αποστάσεις  $(\Delta E) = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$  και  $(ZE) = \frac{\pi}{12} \text{ m}$ .

Να θεωρήσετε ότι τόσο πριν όσο και μετά την κρούση το σώμα  $\Sigma_1$  εκτελεί αρμονική ταλάντωση με θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση προς τα δεξιά.

- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας  $u_2$ .
- Να υπολογίσετε τη μάζα  $m_2$  του σώματος  $\Sigma_2$ .
- Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος  $\Sigma_2$  αμέσως μετά την ελαστική κρούση.
- Στο σώμα  $\Sigma_2$  υπάρχει προσαρμοσμένη αβαρής πηγή παραγωγής ηχητικών κυμάτων συχνότητας  $f_s = 342 \text{ Hz}$ . Στο σώμα  $\Sigma_1$  υπάρχει προσαρμοσμένος αβαρής ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Οι δύο συσκευές ενεργοποιούνται αμέσως μετά την κρούση τη χρονική στιγμή  $t' = 0$ . Να γίνει η γραφική παράσταση της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ο ανιχνευτής σε συνάρτηση με το χρόνο  $t'$  για χρόνο μιας περιόδου ταλάντωσης. Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα  $v = 340 \text{ m/s}$ .

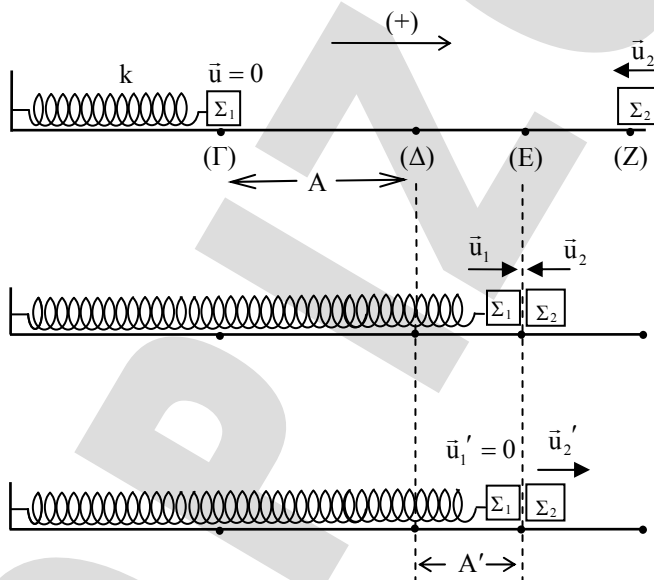
## ΛΥΣΗ

- Αφού τη στιγμή  $t = 0$  το σώμα  $\Sigma_1$  αφήνεται στη θέση Γ, η θέση αυτή είναι ακραία θέση για την απλή αρμονική ταλάντωση που θα ακολουθήσει. Δηλαδή η απόσταση  $(\Gamma\Delta) = 0,2 \text{ m}$  ισούται με το πλάτος  $A$  της ταλάντωσης.

$$\text{Όμως για } t = 0, x = -A \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\text{Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος } \Sigma_1 \text{ είναι: } x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$



Χρονική στιγμή  $t = 0$

Χρονική στιγμή  $t_1$   
(αμέσως πριν την κρούση)

Χρονική στιγμή  $t' = 0$   
(αμέσως μετά την κρούση)

Έστω  $t_1$  η χρονική στιγμή που το σώμα  $\Sigma_1$  φτάνει για πρώτη φορά στο σημείο Ε. Τότε:

$$x = (\Delta E) \Rightarrow 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,1\sqrt{3} \Rightarrow \eta\mu\left(10t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{(1\eta \text{ φορά})}{\Rightarrow} 10t_1 + \frac{3\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{12} \text{ s.}$$

Εκείνη τη στιγμή η ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος  $\Sigma_1$  είναι:

$$u_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t_1 + \phi_0) \Rightarrow u_1 = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow u_1 = 1 \text{ m/s.}$$

Τη ίδια χρονική στιγμή  $t_1$  το σώμα  $\Sigma_2$ , που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, έχει διανύσει την απόσταση  $(ZE)$ .

$$\text{Άρα } (ZE) = u_2 \cdot t_1 \Rightarrow \boxed{u_2 = 1 \text{ m/s.}}$$

- β. Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική, οι ταχύτητες  $\vec{u}_1'$  και  $\vec{u}_2'$  των σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα, μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{u}_1' = \frac{2m_2\vec{u}_2 + (m_1 - m_2)\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \quad \text{①} \quad \text{και} \quad \vec{u}_2' = \frac{2m_1\vec{u}_1 + (m_2 - m_1)\vec{u}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{②}$$

Θέτοντας στη σχέση ① όπου  $u_1' = 0$ ,  $u_1 = 1 \text{ m/s}$  και  $u_2 = -1 \text{ m/s}$ , αφού το σώμα  $\Sigma_2$  κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση από το σώμα  $\Sigma_1$ , παίρνουμε:

$$\text{①} \Rightarrow 0 = \frac{-2m_2 + (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1 = 3m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{3} \Rightarrow \boxed{m_2 = \frac{1}{3} \text{ kg}}$$

- γ. Θέτοντας στη σχέση ② όπου  $u_1 = 1 \text{ m/s}$  και  $u_2 = -1 \text{ m/s}$  παίρνουμε:

$$\text{②} \Rightarrow \boxed{u_2' = 2 \text{ m/s}} \quad \text{η οποία έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.}$$

- δ. Το σώμα  $\Sigma_1$  μετά την κρούση, εκτελεί νέα αρμονική ταλάντωση με πλάτος  $A' = (\Delta E) \Rightarrow A' = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$

$$\text{και κυκλική συχνότητα } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega' = 10 \text{ rad/s.}$$

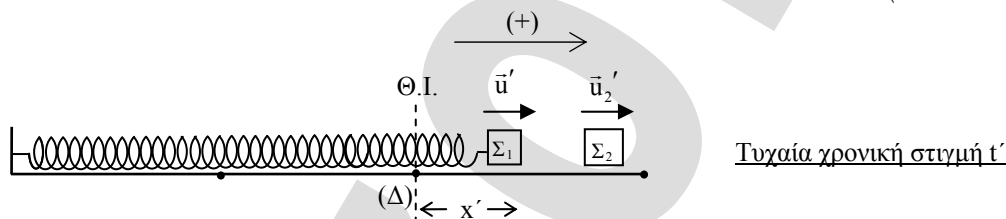
Για την νέα εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος  $\Sigma_1$  ισχύει:  $x' = A' \cdot \eta\mu(\omega't' + \phi_0')$

Τη χρονική στιγμή  $t' = 0$  (νέα αρχή χρόνων), το σώμα βρίσκεται στην ακραία του θέση δηλαδή

$$x' = A' \Rightarrow \eta\mu(\phi_0') = 1 \Rightarrow \phi_0' = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\text{Οπότε } x' = 0,1\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(10t' + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Η νέα εξίσωση της ταχύτητας του } \Sigma_1 \text{ είναι: } u' = \omega' A' \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega't' + \phi_0') \Rightarrow u' = \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10t' + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$



Κάποια τυχαία χρονική στιγμή  $t'$  κατά τη διάρκεια της νέας ταλάντωσης (όπου  $x' > 0$ ,  $u' > 0$ ), η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο ανιχνευτής λόγω του φαινομένου Doppler, δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } f_A = \frac{v + u'}{v + u_2} \cdot f_s \Rightarrow$$

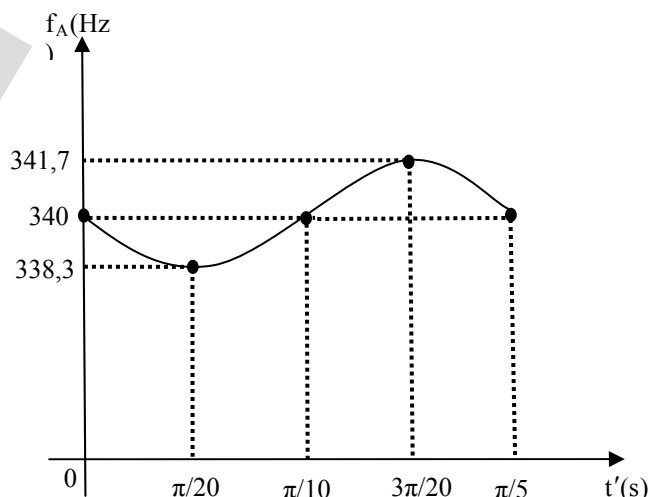
$$\Rightarrow f_A = \frac{340 + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10t' + \frac{\pi}{2}\right)}{340 + 2} \cdot 342 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_A = 340 + 1,7 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10t' + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_A = 340 - 1,7 \cdot \eta\mu(10t') \text{ (S.I.)}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση για

$0 \leq t' \leq T \Rightarrow 0 \leq t' \leq \frac{\pi}{5} \text{ s}$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



#### ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ  
 ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ  
 ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ  
 ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ