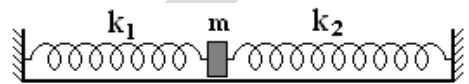


ΑΣΚΗΣΗ

Το σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ του διπλανού σχήματος ισορροπεί δεμένο στα ελεύθερα άκρα των δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 100 \text{ N/m}$ και $k_2 = 300 \text{ N/m}$. Θεωρήστε ότι τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 100 \text{ N}$, στη διεύθυνση των δύο ελατηρίων με φορά προς τα δεξιά.



- Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδό της.
 - Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης του σώματος.
 - Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας θετική την κατεύθυνση προς τα δεξιά.
 - Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, για πρώτη φορά.
 - Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$.
 - Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή που η επιτάχυνσή του έχει αλγεβρική τιμή $a = 50 \text{ m/s}^2$, για πρώτη φορά.
 - Να υπολογίσετε την ορμή του σώματος τη χρονική στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση στην οποία το μέτρο της δύναμης από το ελατήριο σταθεράς k_2 είναι ίσο με το μισό του μέτρου της δύναμης F .
 - Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή $t_3 = \frac{\pi}{40} \text{ s}$.
 - Να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης F τη χρονική στιγμή που η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σταθεράς k_1 , ισούται με το 25% της ενέργειας ταλάντωσης του σώματος για πρώτη φορά.
- Θεωρήστε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος δεν υπάρχουν τριβές και αντιστάσεις από αέρα.

ΛΥΣΗ

- Επειδή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο ($v = 0$) και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, συμπεραίνουμε ότι η θέση φυσικού μήκους (Φ.Μ.) των δύο ελατηρίων είναι ακραία θέση (Α.Θ.) για την ταλάντωση που θα ακολουθήσει. Στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης, η οποία θα βρίσκεται δεξιότερα της θέσης φυσικού μήκους (Φ.Μ.) των δύο ελατηρίων, ισχύει:

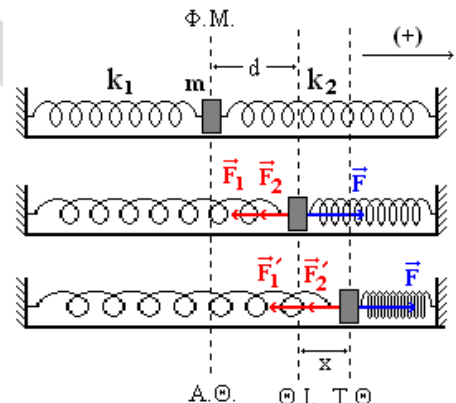
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = F \Rightarrow k_1 d + k_2 d = F \quad (1)$$

Σε μια τυχαία θέση (Τ.Θ.) της ταλάντωσης ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= F - F'_1 - F'_2 \xrightarrow{(1)} \Sigma F = k_1 d + k_2 d - k_1(d+x) - k_2(d+x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x \end{aligned}$$

Άρα το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.) με

$$\text{σταθερά επαναφοράς } D = k_1 + k_2 = 400 \text{ N/m} \text{ και περίοδο ταλάντωσης } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow \boxed{T = 0,1\pi \text{ s}}$$



- Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι η απόσταση μεταξύ ακραίας θέσης και θέσης ισορροπίας. Άρα με βάση το παραπάνω σχήμα ισχύει $A = d \xrightarrow{(1)} A = d = \frac{F}{k_1 + k_2} \Rightarrow A = d = 0,25 \text{ m}$.
Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος είναι: $E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow \boxed{E = 12,5 \text{ J}}$.

- Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ με πλάτος $A = 0,25 \text{ m}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 20 \text{ rad/s}$.

Για να υπολογίσουμε την αρχική φάση της α.α.τ. ικανοποιούμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = -A \Rightarrow A \cdot \eta\mu\phi_0 = -A \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$.

Οπότε: $\boxed{x = 0,25 \cdot \eta\mu(20t + \frac{3\pi}{2}) \text{ στο S.I.}}$

δ. Πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} K = 3U \\ E = K + U \end{array} \right\} \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = 4 \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2} \Rightarrow A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = \pm \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega t + \frac{3\pi}{2} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega t = k\pi \pm \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}.$$

Πρώτη θετική λύση για $k = 2$: $\omega t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{60} \text{ s}$.

ε. Για το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος ισχύει:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -D \cdot x = -D \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -100 \cdot \eta\mu(20t + \frac{3\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$, είναι $\frac{dp}{dt} = -50 \text{ N}$.

στ. Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος ισχύει: $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v$

Τη χρονική στιγμή που $a = 50 \text{ m/s}^2 \Rightarrow -\omega^2 x = 50 \text{ m/s}^2 \Rightarrow x = -0,125 \text{ m}$

και από Α.Δ.Ε. έχουμε: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow v = \pm 2,5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Επειδή το σώμα ξεκίνησε από τη θέση $x = -A$ συμπεραίνουμε ότι την πρώτη φορά, είναι $v = +2,5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Οπότε $\frac{dK}{dt} = 125\sqrt{3} \text{ J/s}$.

ζ. Έστω d_2 η παραμόρφωση του κάθε ελατηρίου τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση στην οποία το μέτρο της δύναμης από το ελατήριο σταθεράς k_2 είναι ίσο με το μισό του μέτρου της δύναμης F . Τότε ισχύει: $k_2 d_2 = \frac{1}{2} F \Rightarrow d_2 = \frac{1}{6} \text{ m}$. Επειδή $d_2 < d$ με βάση το αρχικό σχήμα συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει στη θέση $x_2 = -(d - d_2) \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{12} \text{ m}$ της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

Από Α.Δ.Ε. στη θέση x_2 έχουμε: $E = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} Dx_2^2 \Rightarrow v_2 = \pm \frac{10\sqrt{2}}{3} \text{ m/s}$.

Επειδή το σώμα ξεκίνησε από τη θέση $x = -A$ συμπεραίνουμε ότι, την πρώτη φορά, είναι $v_2 > 0$.

Έτσι η ορμή του σώματος στη θέση αυτή είναι $p_2 = mv_2 \Rightarrow p_2 = \frac{10\sqrt{2}}{3} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$.

η. Η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Για το έργο της μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.). Δηλαδή

$$W_{\Sigma F} = \Delta K \Rightarrow W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} mv_3^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

όπου για $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ και για $t_3 = \frac{\pi}{40} \text{ s}$, $v_3 = \omega A \cdot \sin(20 \frac{\pi}{40} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow v_3 = 5 \text{ m/s}$.

Οπότε $W_{\Sigma F} = 12,5 \text{ J}$.

θ. Έστω d_1 η παραμόρφωση του κάθε ελατηρίου τη χρονική στιγμή που η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σταθεράς k_1 , ισούται με το 25% της ενέργειας ταλάντωσης του σώματος.

Τότε ισχύει: $\frac{1}{2} k_1 d_1^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{4} \text{ m}$. Επειδή $d_1 = d = A$ με βάση το αρχικό σχήμα συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει στη θέση ισορροπίας της απλής αρμονικής ταλάντωσης στην οποία για πρώτη φορά το σώμα διέρχεται με ταχύτητα $v = +v_{\text{max}} = \omega \cdot A \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$.

Για την ισχύ της δύναμης F εκείνη τη χρονική στιγμή ισχύει: $P_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \cdot v \Rightarrow P_F = 500 \text{ W}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ANNA
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ
ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΤΖΗΛΑΚΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ