

ΑΣΚΗΣΗ

Στα σημεία Α και Β της ήρεμης οριζόντιας επιφάνειας ενός υγρού βρίσκονται αντίστοιχα δύο πηγές Π_1 και Π_2 παραγωγής εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων. Οι πηγές ταλαντώνονται σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξισώσεις απομάκρυνσης:

$$y_{\Pi_1} = 0,4 \cdot \eta\mu 10\pi t \text{ (S.I.) και } y_{\Pi_2} = 0,4 \cdot \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Τα παραγόμενα κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα μέτρου $v = 5 \text{ m/s}$. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $d = 8 \text{ m}$. Θεωρούμε ότι το πλάτος κάθε κύματος παραμένει σταθερό κατά τη διάδοσή του στην επιφάνεια του υγρού.

- Α. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ του υγρού, που βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων.
- Β. Να βρείτε τον αριθμό και τις θέσεις των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ στα οποία έχουμε:
i) ενισχυτική συμβολή και ii) αποσβεστική συμβολή.
- Γ. Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του υγρού, που βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει τις πηγές Π_1 και Π_2 προς τα δεξιά της πηγής Π_2 .
- Δ. Τι θα συμβεί στο πλάτος ταλάντωσης των σημείων του υγρού που βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, αν μεταβληθεί η συχνότητα ταλάντωσης και των δύο πηγών με τον ίδιο τρόπο;
- Ε. Θεωρούμε στο σημείο Μ σημειακό κομμάτι φελλού μάζας $m = 0,1 \text{ g}$. Ποιά η δύναμη επαναφοράς που δέχεται ο φελλός, κάποια χρονική στιγμή που η απομάκρυνσή του λόγω συμβολής είναι $y_M = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$;
- ΣΤ. Ποιο ποσοστό επί τοις % της ενέργειας ταλάντωσης του φελλού είναι κινητική, όταν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του λόγω συμβολής είναι $y_M = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$;
- Ζ. Να βρείτε πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική φάση της πηγής Π_2 , ώστε μετά τη συμβολή, ο φελλός στο σημείο Μ να παρέμενε διαρκώς ακίνητος.
Δίνεται $\pi^2 = 10$.

ΛΥΣΗ

- Α. Από τις εξισώσεις ταλάντωσης των δύο πηγών συμπεραίνουμε ότι $A = 0,4 \text{ m}$ και $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$.

Όμως $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 5 \text{ Hz} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$.

Ένα τυχαίο σημείο του μέσου που απέχει αντίστοιχα αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές έχει απομακρύνσεις:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \text{ εξαιτίας του κύματος από την πηγή } \Pi_1 \text{ και}$$

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) \text{ εξαιτίας του κύματος από την πηγή } \Pi_2.$$

Για τη συνολική απομάκρυνση του σημείου αυτού μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων, ισχύει η αρχή της επαλληλίας, δηλαδή:

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = 2A \cdot \text{συν} \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} - \frac{r_2}{\lambda} + \frac{1}{4} \right)}{2} \cdot \eta\mu \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} + \frac{r_2}{\lambda} + \frac{1}{4} \right)}{2} \Rightarrow y = 2A \cdot \text{συν} 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda} - \frac{1}{8} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} + \frac{1}{8} \right) \textcircled{1}$$

Για τη απομάκρυνση του σημείου Μ, που βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, θέτουμε $r_1 = r_2 = \frac{d}{2} = 4 \text{ m}$, οπότε:

$$\textcircled{1} \Rightarrow y_M = 0,8 \cdot \text{συν} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(5t - \frac{31}{8} \right) \Rightarrow y_M = 0,4\sqrt{2} \cdot \eta\mu 2\pi \left(5t - \frac{31}{8} \right) \text{ (S.I.) για } t \geq 0,8 \text{ s.}$$

- Β. i) Ενισχυτική συμβολή συμβαίνει στα σημεία που το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο, δηλαδή όταν:

$$\text{συν} 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda} - \frac{1}{8} \right) = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda} - \frac{1}{8} \right) = k\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{4} \textcircled{2} \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Τότε:

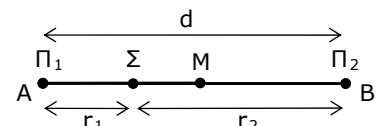
$$\textcircled{2} \Rightarrow r_2 - (d - r_2) = k\lambda + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 2r_2 = k\lambda + \frac{\lambda}{4} + d \Rightarrow r_2 = \frac{k}{2} + \frac{33}{8} \text{ m}$$

Όμως

$$\frac{d}{2} < r_2 < d \Rightarrow 4 < \frac{k}{2} + \frac{33}{8} < 8 \Rightarrow -\frac{1}{8} < \frac{k}{2} < \frac{31}{8} \Rightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{31}{4} \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι τιμές του k και οι αντίστοιχες αποστάσεις των σημείων από την πηγή Π_2 .

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_2 \text{ (m)}$	4,125	4,625	5,125	5,625	6,125	6,625	7,125	7,625



B. ii) Αποσβεστική συμβολή συμβαίνει στα σημεία που το πλάτος ταλάντωσης είναι μηδέν, δηλαδή όταν:

$$\sin 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda} - \frac{1}{8} \right) = 0 \Rightarrow 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda} - \frac{1}{8} \right) = (2k+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_2 - r_1 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad \text{③} \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Z του ευθύγραμμου τμήματος AM στο οποίο συμβαίνει αποσβεστική συμβολή. Τότε:

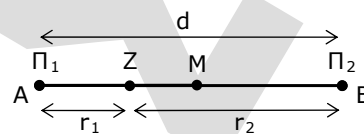
$$\text{③} \Rightarrow r_2 - (d - r_2) = (2k+1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow r_2 = \frac{k}{2} + \frac{35}{8} \text{ m}$$

Όμως

$$\frac{d}{2} < r_2 < d \Rightarrow 4 < \frac{k}{2} + \frac{35}{8} < 8 \Rightarrow -\frac{3}{8} < \frac{k}{2} < \frac{29}{8} \Rightarrow -\frac{3}{4} < k < \frac{29}{4} \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι τιμές του k και οι αντίστοιχες αποστάσεις των σημείων από την πηγή Π₂.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
r ₂ (m)	4,375	4,875	5,375	5,875	6,375	6,875	7,375	7,875



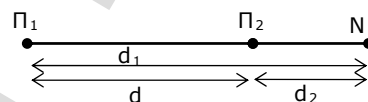
Γ. Έστω τυχαίο σημείο N δεξιά της πηγής Π₂, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για το σημείο N ισχύει:

$$A'_N = 2A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{d_2 - d_1}{2\lambda} - \frac{1}{8} \right) \Rightarrow A'_N = 2A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{d}{2\lambda} + \frac{1}{8} \right) \quad \text{④}$$

Για A = 0,4 m, λ = 1 m και d = 8 m προκύπτει: A'_N = 0,4√2 m.

Σημείωση: Από τη σχέση ④ προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων που βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει τις πηγές Π₁ και Π₂ προς τα δεξιά της πηγής Π₂, είναι ανεξάρτητο της θέσης τους και έχει την ίδια τιμή για όλα τα σημεία αυτά.



Δ. Από τη σχέση ① προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων που βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος AB (άρα ισχύει r₁ = r₂ ⇒ r₁ - r₂ = 0), είναι σταθερό και ανεξάρτητο της συχνότητας ταλάντωσης των πηγών. Συνεπώς το πλάτος τους δε θα μεταβληθεί με την αλλαγή της συχνότητας.

Ε. Η δύναμη επαναφοράς που δέχεται ο φελλός μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων, είναι:

$$\Sigma F = -m\omega^2 y_M \Rightarrow \Sigma F = -10^{-2} \sqrt{2} \text{ N}.$$

ΣΤ. Για την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του φελλού μετά τη συμβολή, ισχύει:

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 y_M^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{A'_M}{4} \right)^2 \Rightarrow U = \frac{E}{16}, \text{ όπου } E \text{ η ενέργεια ταλάντωσής του.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\alpha\% = \frac{K}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \alpha\% = \frac{E-U}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \alpha\% = 93,75\%.$$

Ζ. Έστω φ₀ η άγνωστη αρχική φάση. Τότε: y_{Π,1} = 0,4·ημ(10πt) (S.I.) και y_{Π,2} = 0,4·ημ(10πt + φ₀) (S.I.)

Το σημείο M, που απέχει αντίστοιχα αποστάσεις r₁ = r₂ = $\frac{d}{2} = 4 \text{ m}$ από τις δύο πηγές θα είχε απομακρύνσεις:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu (10\pi t - 8\pi) \text{ (S.I.) εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π₁ και}$$

$$y_2 = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] \Rightarrow y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu (10\pi t - 8\pi + \phi_0) \text{ (S.I.) εξαιτίας του κύματος από την πηγή Π₂.}$$

Για να παρέμενε ο φελλός διαρκώς ακίνητος, θα έπρεπε στο σημείο M να συνέβαινε αποσβεστική συμβολή, δηλαδή τα συμβάλλοντα στο σημείο M κύματα να φτάνουν κάθε χρονική στιγμή με αντίθεση φάσης.

Αρα θα έπρεπε:

$$\Delta\phi = 2k\pi + \pi \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = 2k\pi + \pi \Rightarrow (10\pi t - 8\pi + \phi_0) - (10\pi t - 8\pi) = 2k\pi + \pi \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi$$

όπου για k = 0 παίρνουμε φ₀ = π rad.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ
ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΤΖΗΛΑΚΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ