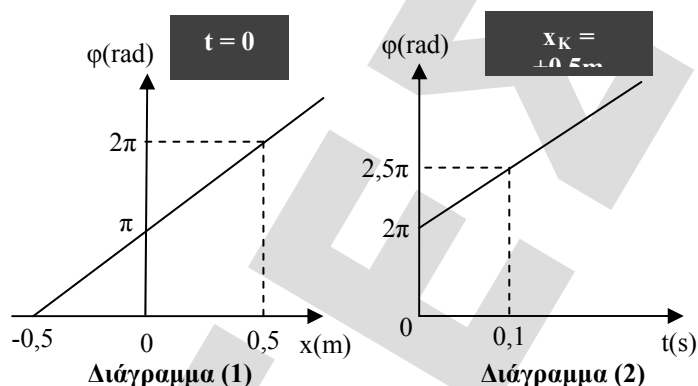


ΑΣΚΗΣΗ

A. Πηγή αρμονικών κυμάτων εκτελεί ταλάντωση πλάτους $A = 0,4 \text{ m}$, δημιουργώντας κύμα που διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$. Στο διάγραμμα (1) φαίνεται η φάση των σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή $t = 0$ και στο διάγραμμα (2) φαίνεται η φάση του σημείου K ($x_K = +0,5 \text{ m}$) σε συνάρτηση με το χρόνο.



1. Ποια είναι η φορά διάδοσης του κύματος;
 2. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου O ($x = 0$).
 3. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
 4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
 5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ ($x_\Lambda = -1 \text{ m}$) σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι την χρονική στιγμή που θα έχει ολοκληρώσει μιάμιση πλήρη ταλάντωση.
 6. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της ταλάντωσης του σημείου Λ, κάποια χρονική στιγμή που το σημείο K βρίσκεται στην κατώτερη ακραία θέση του.
 7. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$, για τα υλικά σημεία που βρίσκονται στις θέσεις με $-2 \text{ m} \leq x \leq 0,75 \text{ m}$.
- B.** Στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδεται ταυτόχρονα και δεύτερο αρμονικό κύμα της ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους με εξίσωση $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$. Τα δύο κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας στάσιμο κύμα.

1. Να διερευνήσετε αν το υλικό σημείο O ($x = 0$) είναι κοιλία ή δεσμός.
2. Να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο γραμμικό ελαστικό μέσο.
3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που βρίσκονται μεταξύ των σημείων N ($x_N = -0,75 \text{ m}$) και M ($x_M = +1 \text{ m}$).
4. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα του πλάτους ταλάντωσης των σημείων του μέσου που βρίσκονται μεταξύ των σημείων N και M.
5. Μεταβάλλουμε κατάλληλα τη συχνότητα των δύο τρεχόντων κυμάτων ώστε στο σημείο N να δημιουργείται δεσμός και μεταξύ των σημείων N και O, να υπάρχουν άλλοι δύο δεσμοί. Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας των δύο κυμάτων.

ΛΥΣΗ

A.1. Από το διάγραμμα (1), (φάσης – θέσης), έχουμε για $x_1 = 0,5 \text{ m} \rightarrow \varphi_1 = 2\pi \text{ rad}$ και για $x_2 = 0 \rightarrow \varphi_2 = \pi \text{ rad}$. Επειδή κάθε αρμονικό κύμα διαδίδεται από σημεία μεγαλύτερης φάσης προς σημεία μικρότερης φάσης συμπεραίνουμε ότι η φορά διάδοσης του κύματος είναι προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.

A.2. Από το διάγραμμα (1) έχουμε για $t = 0$ και $x = 0 \rightarrow \varphi = \pi \text{ rad}$. Άρα $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Από την κλίση του διαγράμματος (2), (φάσης – χρόνου), προκύπτει: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = 5\pi \text{ rad/s}$.

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου O ($x = 0$) είναι $y_O = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y_O = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t + \pi)$ (S.I.).

A.3. Η εξίσωση του κύματος είναι $y = A \cdot \eta\mu \left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi_0 \right)$ όπου $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$.

Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι $\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi_0$.

Από το διάγραμμα (1) έχουμε για $t = 0$ και $x = -0,5 \text{ m} \rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$. Άρα $\lambda = 1 \text{ m}$.

Οπότε η εξίσωση του κύματος είναι: $y = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t + 2\pi x + \pi)$ (S.I.)

A.4. Η συχνότητα του κύματος είναι $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 2,5 \text{ Hz}$, οπότε από τη θεμελιώδη εξίσωση κυματικής προκύπτει:

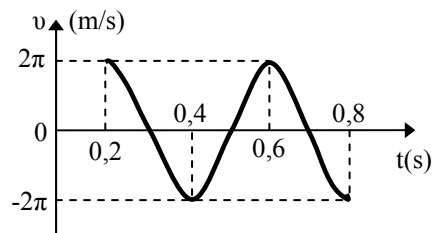
$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = 2,5 \text{ m/s}.$$

A.5. Για την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Λ ($x_\Lambda = -1 \text{ m}$) ισχύει:

$$v_\Lambda = \omega A \cdot \sin(5\pi t + 2\pi x_\Lambda + \pi) \Rightarrow v_\Lambda = 2\pi \cdot \sin(5\pi t - \pi)$$
 (S.I.)

Το σημείο Λ θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1 όπου $\varphi_\Lambda = 0 \Rightarrow 5\pi t_1 - \pi = 0 \Rightarrow t_1 = 0,2 \text{ s}$ και θα ολοκληρώσει μιάμιση πλήρη ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,5T + 0,2 \Rightarrow t_2 = 0,8 \text{ s}$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



A.6. Επειδή $x_\Lambda = -1 \text{ m}$ και $x_K = +0,5 \text{ m}$, η απόσταση των σημείων K και Λ είναι $\Delta x = 1,5 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 1,5\lambda$.

Άρα τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, οπότε όταν το σημείο Κ βρίσκεται στην κατώτερη ακραία θέση, το σημείο Λ βρίσκεται στην ανώτερη ακραία θέση της ταλάντωσής του. Δηλαδή

$$a_{\Lambda} = -a_{\max} \Rightarrow a_{\Lambda} = -\omega^2 A \Rightarrow a_{\Lambda} = -10\pi^2 \text{ m/s}^2.$$

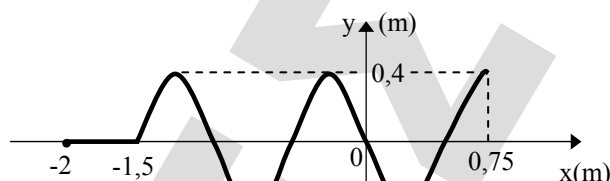
- A.7.** Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ η εξίσωση του κύματος γίνεται: $y = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi x + 3\pi)$ (S.I.)

Το κύμα τη στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ έχει φτάσει μέχρι τη θέση x_1 για την οποία $\varphi = 0 \Rightarrow 2\pi x_1 + 3\pi = 0 \Rightarrow x_1 = -1,5 \text{ m}$.

Η απόσταση των θέσεων $x_1 = -1,5 \text{ m}$ και $x_2 = 0,75 \text{ m}$ είναι $\Delta x = 2,25 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 2,25\lambda$

Το σημείο στη θέση $x_2 = 0,75 \text{ m}$ τη στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ έχει απομάκρυνση $y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu(4,5\pi) \Rightarrow y_2 = 0,4 \text{ m}$.

Το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- B.1.** Οι εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν είναι: $y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t + 2\pi x + \pi)$ και $y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t - 2\pi x)$ (S.I.)
Το σημείο Ο ($x = 0$) εκτελεί δύο ταλαντώσεις με απομακρύνσεις: $y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t + \pi)$ και $y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t)$ (S.I.)
Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας $y_O = y_1 + y_2 \Rightarrow y_O = 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t + \pi) + 0,4 \cdot \eta\mu(5\pi t) \Rightarrow y_O = 0$
Δηλαδή το σημείο Ο ($x = 0$) είναι κάθε χρονική στιγμή ακίνητο, άρα είναι δεσμός του στάσιμου κύματος.

- B.2.** Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας $y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = 0,4 \cdot [\eta\mu(5\pi t + 2\pi x + \pi) + \eta\mu(5\pi t - 2\pi x)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = 0,8 \cdot \sin\left(\frac{5\pi t + 2\pi x + \pi - 5\pi t + 2\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi t + 2\pi x + \pi + 5\pi t - 2\pi x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0,8 \cdot \sin\left(\frac{4\pi x + \pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{10\pi t + \pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

- B.3.** Δεσμοί είναι τα σημεία των οποίων το πλάτος ταλάντωσης είναι μηδέν, δηλαδή:

$$A' = 0 \Rightarrow 0,8 \cdot \left| \sin\left(\frac{4\pi x + \pi}{2}\right) \right| = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{4\pi x + \pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4\pi x + \pi}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{\text{δεσ}} = \frac{k}{2} \text{ m, με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Πρέπει } x_N < x_{\text{δεσ}} < x_M \Rightarrow -0,75 < \frac{k}{2} < 1 \Rightarrow -1,5 < k < 2 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Άρα $k = -1, 0, 1$, δηλαδή υπάρχουν τρεις δεσμοί μεταξύ των σημείων Ν και Μ.

Κοιλίες είναι τα σημεία των οποίων το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο, δηλαδή

$$A' = 2A \Rightarrow 0,8 \cdot \left| \sin\left(\frac{4\pi x + \pi}{2}\right) \right| = 0,8 \Rightarrow \sin\left(\frac{4\pi x + \pi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{4\pi x + \pi}{2} = k\pi \Rightarrow x_{\text{κοιλ}} = \frac{2k-1}{4} \text{ m, με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Πρέπει } x_N < x_{\text{κοιλ}} < x_M \Rightarrow -0,75 < \frac{2k-1}{4} < 1 \Rightarrow -3 < 2k-1 < 4 \Rightarrow -1 < k < 2,5 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Άρα $k = 0, 1, 2$, δηλαδή υπάρχουν τρεις κοιλίες μεταξύ των σημείων Ν και Μ.

- B.4.** Το πλάτος του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $A' = 0,8 \cdot \left| \sin\left(\frac{4\pi x + \pi}{2}\right) \right|$ (S.I.)

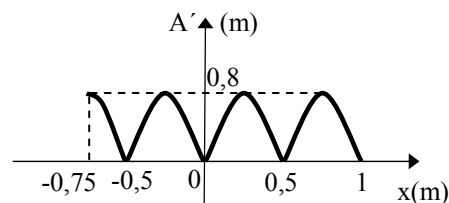
Το σημείο Ν ($x_N = -0,75 \text{ m}$) έχει πλάτος

$$A'_N = 0,8 \cdot \left| \sin\left(\frac{4\pi x_N + \pi}{2}\right) \right| \Rightarrow A'_N = 0,8 \text{ m, δηλαδή είναι κοιλία.}$$

Το σημείο Μ ($x_M = 1 \text{ m}$) έχει πλάτος

$$A'_M = 0,8 \cdot \left| \sin\left(\frac{4\pi x_M + \pi}{2}\right) \right| \Rightarrow A'_M = 0, \text{ δηλαδή είναι δεσμός.}$$

Το διάγραμμα του πλάτους φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



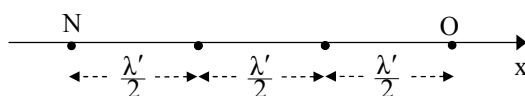
- B.5.** Από την εκφώνηση τα σημεία Ν και Ο είναι δεσμοί και μεταξύ τους υπάρχουν ακόμα δύο δεσμοί. Αν λ' το νέο μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν, η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών του νέου στάσιμου κύματος είναι $\frac{\lambda'}{2}$.

Για την απόσταση (ΝΟ) σύμφωνα με το σχήμα, ισχύει:

$$(NO) = 3 \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow 0,75 = 1,5\lambda' \Rightarrow \lambda' = 0,5 \text{ m}$$

Τα κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσο άρα η ταχύτητα διάδοσης είναι σταθερή. Οπότε $v = \lambda' \cdot f' \Rightarrow f' = 5 \text{ Hz}$.

Το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας είναι: $\Pi\% = \frac{f' - f}{f} 100\% \Rightarrow \Pi\% = 100\%$ (αύξηση).



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΡΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ