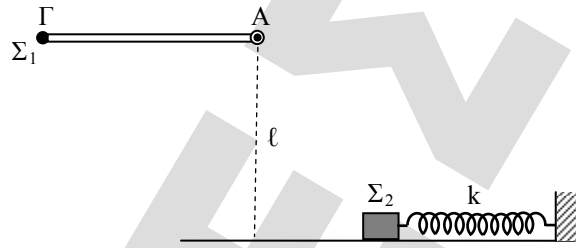


ΑΣΚΗΣΗ

Η ευθύγραμμη ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας $M = 3 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 1 \text{ m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α, είναι κάθετος σ' αυτή και απέχει απόσταση $\ell = 1 \text{ m}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Στο άκρο της Γ είναι στερεωμένο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ αμελητέων διαστάσεων. Το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από την οριζόντια θέση. Τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση, μέσω κατάλληλου εκρηκτικού μηχανισμού, το σώμα Σ_1 εκτοξεύεται ακαριαία με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \text{ m/s}$ προς τα δεξιά. Το σώμα Σ_1 κινούμενο στο λείο οριζόντιο δάπεδο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με μικρό σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 4 \text{ kg}$ το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,5 \text{ m}$ δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά στερεωμένο. Η κρούση συμβαίνει τη στιγμή που το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα αριστερά. Να υπολογίσετε:



- Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο από την οριζόντια θέση.
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 αμέσως πριν την έκρηξη.
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την έκρηξη.
- Τη μηχανική ενέργεια που προσφέρεται μέσω του εκρηκτικού μηχανισμού στο σύστημα.
- Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως πριν την κρούση.
- Τις ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση.
- Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 κατά την κρούση.
- Τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση.
- Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 , τη χρονική στιγμή που το ελατήριο έχει υποστεί το μισό της μέγιστης παραμόρφωσής του για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Να θεωρήσετε ότι οι απομακρύνσεις των δύο ταλαντώσεων είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου και θετική κατεύθυνση και για τις δύο ταλαντώσεις είναι η κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σ' αυτή που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

ΛΥΣΗ

- α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$I_{\text{ολ}(A)} = I_{\rho,(A)} + I_{\Sigma_1(A)}.$$

$$\text{Λόγω Steiner } I_{\rho,(A)} = I_{\text{cm}} + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M \ell^2 + M \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} M \ell^2 \Rightarrow I_{\rho,(A)} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$\text{Επίσης } I_{\Sigma_1(A)} = m_1 \cdot \ell^2 \Rightarrow I_{\Sigma_1(A)} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

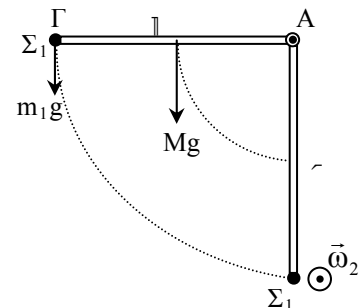
$$\text{Άρα } \boxed{I_{\text{ολ}(A)} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}.$$

- β) Σύμφωνα με το 2^ο νόμο Newton για τη στροφική κίνηση του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 στην οριζόντια θέση ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}_{(A)} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = m_1 g \ell + Mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2}.$$

- γ) Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που αποκτά το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 στην κατακόρυφη θέση. Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας κατά τη μετάβαση του συστήματος από την οριζόντια θέση $\neg$ στην κατακόρυφη θέση $\cap$ ισχύει:

$$K_2 - K_1 = W_{\text{ολ}} \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{ολ}(A)} \omega_2^2 - 0 = m_1 g \ell + Mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 5 \text{ rad/s}}.$$



- δ) Έστω ω_3 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που αποκτά η ράβδος αμέσως μετά την έκρηξη. Για το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 κατά την έκρηξη $\Sigma \vec{\tau}_{\epsilon\epsilon} = 0$, οπότε σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής, ισχύει:

$$\vec{L}_{\text{ολ, ΠΙΝ}} = \vec{L}_{\text{ολ, ΜΕΤΑ}} \Rightarrow I_{\text{ολ(A)}} \omega_2 = I_{\text{ρ(A)}} \omega_3 + m_1 v_1 \ell \Rightarrow \boxed{\omega_3 = 0 \text{ rad/s}}$$

Δηλαδή η ράβδος ακινητοποιείται αμέσως μετά την έκρηξη.

- ε) Η μηχανική ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του εκρηκτικού μηχανισμού υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή:

$$\Delta E_{\text{MHX}} = K_{\text{ολ, ΜΕΤΑ}} - K_{\text{ολ, ΠΙΝ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} I_{\text{ολ(A)}} \omega_2^2 \Rightarrow \boxed{\Delta E_{\text{MHX}} = 25 \text{ J}}$$

- στ) Αφού η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας της αρχικής α.α.τ. το μέτρο της ταχύτητας v_2 του σώματος Σ_2 αμέσως πριν την κρούση είναι:

$$|v_2| = v_{\text{max}} \Rightarrow |v_2| = \omega \cdot A \Rightarrow |v_2| = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \cdot A \Rightarrow \boxed{|v_2| = 2,5 \text{ m/s}}$$

- ζ) Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, οπότε ισχύουν:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2|v_2|}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{v_1' = -10 \text{ m/s}} \text{ και } v_2' = \frac{2m_1v_1 - (m_2 - m_1)|v_2|}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{v_2' = 2,5 \text{ m/s}}$$

Δηλαδή αμέσως μετά την ελαστική κρούση τα δύο σώματα αντιστρέφουν τις ταχύτητές τους.

- η) Για τη μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1, \text{μετά}} - \vec{p}_{1, \text{πριν}} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -20 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow \boxed{|\Delta p_1| = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

- θ) Για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 κατά την κρούση ισχύει:

$$\Delta K_2 = K_{2, \text{μετά}} - K_{2, \text{πριν}} \Rightarrow \Delta K_2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow \boxed{\Delta K_2 = 0 \text{ J}}$$

- ι) Το σώμα Σ_2 μετά την ελαστική κρούση έχει την ίδια θέση ισορροπίας και την ίδια γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$.

Αφού η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας της νέας α.α.τ. για το μέτρο της ταχύτητας v_2' του σώματος Σ_2 ισχύει: $v_2' = v_{\text{max}} \Rightarrow v_2' = \omega \cdot A' \Rightarrow A' = 0,5 \text{ m}$.

Άρα η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι $\Delta \ell_{\text{max}} = A' \Rightarrow \boxed{\Delta \ell_{\text{max}} = 0,5 \text{ m}}$.

- κ) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ταλαντευόμενου σώματος Σ_2 ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \Sigma \vec{F} \cdot \vec{v} = -k \cdot x \cdot v$$

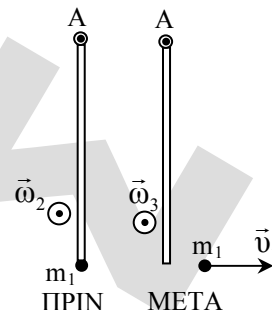
όπου $x = \frac{\Delta \ell_{\text{max}}}{2} \Rightarrow x = 0,25 \text{ m}$ και v η ταχύτητα ταλάντωσης του στη θέση αυτή.

Για την ταχύτητα v του σώματος Σ_2 σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης στη θέση $x = 0,25 \text{ m}$, ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k (A')^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow v = \pm 1,25\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Όμως για πρώτη φορά μετά την κρούση το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = 0,25 \text{ m}$ κινούμενο προς τα δεξιά άρα με θετική ταχύτητα $v = 1,25\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Οπότε: $\boxed{\frac{dK}{dt} = -31,25\sqrt{3} \text{ J/s}}$



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ANNA
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ