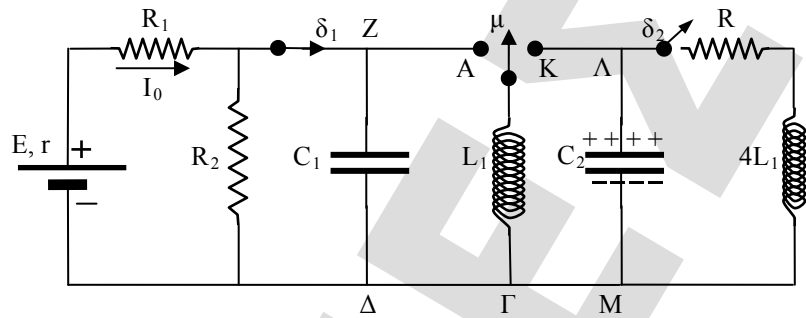


ΑΣΚΗΣΗ

Στο κύκλωμα του σχήματος, η πηγή έχει ΗΕΔ $E = 100\text{V}$ και $r = 1\Omega$, ο αντιστάτης $R_1 = 4\Omega$ διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης $I_0 = 10\text{A}$, ενώ ο διακόπτης (δ_1) είναι κλειστός. Να υπολογίσετε την τιμή της R_2 και το φορτίο του πυκνωτή με χωρητικότητα $C_1 = 20\mu\text{F}$.



A. Ανοίγουμε το διακόπτη (δ_1) και φέρουμε το μεταγωγό (μ) στη θέση A, χωρίς να ξεσπάσει σπινθήρας, οπότε τη στιγμή $t = 0$ ξεκινά αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση στο ιδανικό κύκλωμα L_1C_1 , όπου $L_1 = 2\text{mH}$.

1. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις για το φορτίο και για την ένταση του ρεύματος.
2. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος όταν $U_B = 3U_E$ για πρώτη φορά.
3. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο και να βρείτε τη χρονική στιγμή που γίνεται μέγιστος για πρώτη φορά.

B. Κάποια στιγμή που η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L_1C_1 είναι μέγιστη και έχει φορά από το Γ προς το A, μεταφέρουμε ακαριαία τον μεταγωγό (μ) από το A στο K. Κατά τη μεταφορά ξεσπάει σπινθήρας οπότε η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου μειώνεται κατά 25%. Τη στιγμή που ο μεταγωγός φτάνει στο K, (την οποία θεωρούμε $t' = 0$), ξεκινά ηλεκτρική ταλάντωση στο ιδανικό κύκλωμα L_1C_2 , με διπλάσια συχνότητα από αυτή της προηγούμενης και ενέργεια ίση με την ενέργεια της προηγούμενης ταλάντωσης.

1. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα C_2 καθώς και την αρχική τάση που είχε φορτίσει τον πυκνωτή C_2 .
2. Να γράψετε την εξίσωση του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή C_2 που την στιγμή $t = 0$ ήταν θετικά φορτισμένος (συνδεδεμένος στο Λ όπως φαίνεται στο σχήμα).
3. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται για πρώτη φορά.

Γ. Την παραπάνω χρονική στιγμή φέρνουμε τον μεταγωγό (μ) πάλι στο A και κλείνουμε τον διακόπτη (δ_2). Μετά από 300 πλήρεις ταλαντώσεις το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή υποδιπλασιάζεται.

1. Να παραστήσετε γραφικά το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο $Q = f(t)$.
2. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο η θερμότητα που αναπτύσσεται στον αντιστάτη R είναι ίση με τα 15/16 της αρχικής ενέργειας του νέου κυκλώματος.

ΛΥΣΗ

Αφού η ένταση του ρεύματος είναι σταθερή, ο πυκνωτής C_1 είναι πλήρως φορτισμένος, οπότε ο κλάδος που τον περιέχει δεν διαρρέεται από ρεύμα. Εφαρμόζοντας τον νόμο Ohm για κλειστό κύκλωμα παίρνουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2 + r} \Rightarrow R_2 = \frac{E}{I_0} - R_1 - r \Rightarrow R_2 = 5\Omega.$$

Ο πυκνωτής C_1 είναι συνδεδεμένος παράλληλα στον αντιστάτη R_2 άρα $V_{C1} = V_2 = I_0 \cdot R_2 = 50\text{V}$.

Το φορτίο του πυκνωτή C_1 είναι: $Q_1 = C_1 \cdot V_{C1} \Rightarrow Q_1 = 10^{-3}\text{C}$.

A.1. Στο κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L_1C_1 , ισχύει: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}} \Rightarrow \omega_1 = 5000\text{ rad/s}$.

Αφού για $t = 0$ ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος ισχύει $q = Q_1 \cdot \sin \omega_1 t \Rightarrow q = 10^{-3} \sin 5000t$ (S.I.)

Το πλάτος της έντασης του ρεύματος είναι $I_1 = \omega_1 Q_1 = 5\text{A}$ οπότε $i = -5 \cdot \eta \mu 5000t$ (S.I.).

A.2. Το πηνίο λόγω της αυτεπαγωγής εμφανίζει πτώση τάσης $V_L = L_1 \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{V_L}{L_1}$ ①

Από το 2^ο κανόνα Kirchhoff ισχύει $V_L + V_C = 0 \Rightarrow V_L = -V_C \Rightarrow V_L = -\frac{q}{C_1}$ ②

Από ①, ② για το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος ισχύει: $\frac{di}{dt} = -\frac{q}{L_1 C_1} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega_1^2 q$ ③

$$\left. \begin{array}{l} U_B = 3U_E \\ E = U_B + U_E \end{array} \right\} \Rightarrow E = 4U_E \Rightarrow \frac{Q_1^2}{2C_1} = 4 \frac{q^2}{2C_1} \Rightarrow q = \pm \frac{Q_1}{2} \Rightarrow q = \pm 5 \cdot 10^{-4}\text{C}$$

Αφού τη στιγμή $t = 0$ ο πυκνωτής είχε $q = +Q_1$, για πρώτη φορά συμβαίνει $U_B = 3U_E$ όταν $q = +5 \cdot 10^{-4}\text{C}$.

Οπότε ③ $\Rightarrow \frac{di}{dt} = -125 \cdot 10^2\text{ A/s}$.

Αλλιώς: $U_B = 3U_E \Rightarrow E \cdot \eta \mu^2(\omega_1 t) = 3E \cdot \sin^2(\omega_1 t) \Rightarrow \epsilon \phi^2(\omega_1 t) = 3 \Rightarrow \epsilon \phi(\omega_1 t) = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \omega_1 t = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

Η πρώτη θετική λύση είναι για $k = 0$: $\omega_1 t = \frac{\pi}{3}$, οπότε:

$$\textcircled{3} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega_1^2 \cdot Q_1 \sin \omega_1 t \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega_1^2 \cdot Q_1 \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -125 \cdot 10^2 \text{ A/s.}$$

A.3. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου μεταβάλλεται, με ρυθμό:

$$\frac{dU_B}{dt} = V_L \cdot i = -V_C \cdot i = -\frac{q \cdot i}{C_1} = -\frac{Q_1 \sin \omega_1 t \cdot (-I_1 \eta \omega_1 t)}{C_1} = \frac{Q_1 \cdot I_1 \eta 2 \omega_1 t}{2C_1} \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = 125 \cdot \eta 10^4 t \text{ (S.I.)}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της U_B γίνεται μέγιστος όταν $\eta 10^4 t = 1 \Rightarrow 10^4 t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Για πρώτη φορά με $k = 0$, παίρνουμε $t = 5\pi \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

B.1. Στο 2^ο κύκλωμα ισχύει $f_2 = 2f_1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_2}} = 2 \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} \Rightarrow C_1 = 4C_2 \Rightarrow C_2 = 5\mu\text{F}$.

Αφού τη στιγμή που έγινε η μεταγωγή το πηνίο διαρρέονταν από μέγιστο ρεύμα και η ενέργειά του μειώθηκε κατά 25% συμπεραίνουμε ότι του απέμεινε το 75% της αρχικής του ενέργειας, δηλαδή $U_B = \frac{75}{100} \frac{1}{2} L_1 I_1^2$.

Όμως η ενέργεια ταλάντωσης στο δεύτερο κύκλωμα είναι ίση με αυτή που είχε το πρώτο κύκλωμα, άρα:

$$U_E + U_B = E_1 \Rightarrow \frac{1}{2} C_2 V_{02}^2 + \frac{75}{100} \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \Rightarrow V_{02} = 50 \text{ V.}$$

B.2. Τη στιγμή $t' = 0$ που αρχίζει η νέα ταλάντωση, ο πυκνωτής C_2 έχει φορτίο $q = C_2 V_{02} \Rightarrow q = 25 \cdot 10^{-5} \text{ C}$.

Επειδή $E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{Q_2^2}{2C_2} \Rightarrow Q_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ που είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή.

Για τη στιγμή $t' = 0$, ισχύει $q = Q_2 \sin \phi_0 \Rightarrow 25 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-4} \sin \phi_0 \Rightarrow \sin \phi_0 = 0,5 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{3}$ ή $\phi_0 = \frac{5\pi}{3}$.

Επειδή για $t' = 0$ ισχύει $i > 0 \Rightarrow \eta \mu \phi_0 < 0$ συμπεραίνουμε ότι $\phi_0 = \frac{5\pi}{3}$.

Επίσης $f_2 = 2f_1 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = 10^4 \text{ rad/s}$ και $I_2 = \omega_2 Q_2 \Rightarrow I_2 = 5 \text{ A}$.

Άρα $q = 5 \cdot 10^{-4} \sin \left(10^4 t + \frac{5\pi}{3} \right)$ (S.I.) και $i = -5 \cdot \eta \mu \left(10^4 t + \frac{5\pi}{3} \right)$ (S.I.)

B.3. Πρέπει $i = 0 \Rightarrow -5 \cdot \eta \mu \left(10^4 t + \frac{5\pi}{3} \right) = 0 \Rightarrow 10^4 t + \frac{5\pi}{3} = k\pi$ οπότε πρώτη φορά με $k = 2$ παίρνουμε $t = \frac{\pi}{3} 10^{-4} \text{ s}$.

Γ.1. Αφού στο νέο κύκλωμα υπάρχει ωμική αντίσταση, η ηλεκτρική ταλάντωση είναι φθίνουσα και το μέγιστο φορτίο μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $Q = Q_0 \cdot e^{-\Lambda t}$.

Όταν άρχισε η φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση, ο πυκνωτής C_2 είχε μέγιστο φορτίο $Q_0 = Q_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$.

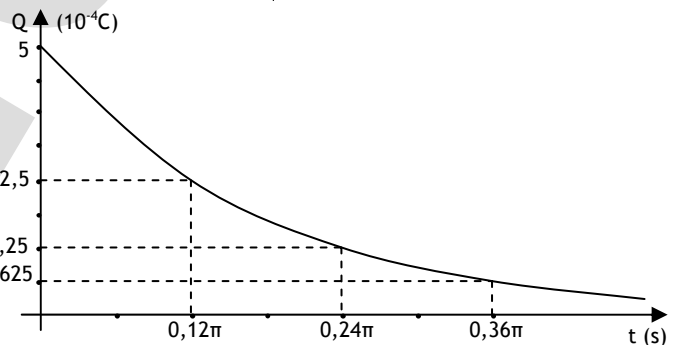
Η περίοδος της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης, όπως υποδεικνύεται στο σχολικό βιβλίο, είναι ίση με την περίοδο της αντίστοιχης αμείωτης ηλεκτρικής ταλάντωσης, δηλαδή $T = 2\pi\sqrt{4L_1 \cdot C_2} \Rightarrow T = 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Αφού σε χρόνο $t = 300T$, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή υποδιπλασιάζεται, ισχύει:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot 300T} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda \cdot 300T \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{300T} \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{0,12\pi} \text{ s}^{-1}$$

Άρα $Q = 5 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{0,12\pi} t}$ (S.I.)

Η γραφική παράσταση του $Q = f(t)$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Γ.2. Η θερμότητα που αναπτύσσεται στον αντιστάτη R είναι ίση με την απώλεια ενέργειας της ηλεκτρικής ταλάντωσης. Άρα

$$\Delta E = -\frac{15}{16} E_0 \Rightarrow E = \frac{1}{16} E_0 \Rightarrow \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{1}{16} \frac{Q_0^2}{2C_2} \Rightarrow Q = \frac{Q_0}{4} \Rightarrow Q = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ C.}$$

Οπότε $1,25 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{\ln 2}{0,12\pi} t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\frac{\ln 2}{0,12\pi} t} \Rightarrow 2 \ln 2 = \frac{\ln 2}{0,12\pi} t \Rightarrow t = 0,24\pi \text{ s.}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ANNA
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ
ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΤΖΗΛΑΚΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ