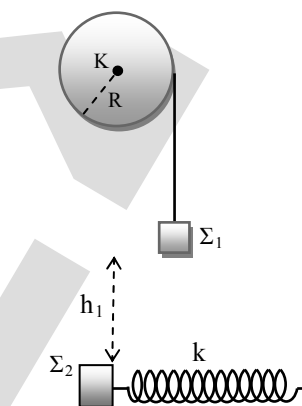


ΑΣΚΗΣΗ

Ομογενής τροχαλία μάζας $M = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,5 \text{ m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο της K και είναι κάθετος σε αυτή. Αβαρές μη εκτατό νήμα έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια της τροχαλίας και στο άλλο άκρο του έχει δεθεί σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο και το νήμα τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο ώστε μετά από χρόνο t_1 το σώμα Σ_1 έχει κατέβει κατά h_1 και η τροχαλία έχει αποκτήσει στροφορμή μέτρου $L_1 = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. Να υπολογίσετε:

- Την επιτάχυνση του σώματος Σ_1 .
- Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- Την κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 .
- Το ύψος h_1 .
- Το έργο της τάσης του νήματος που δέχεται η τροχαλία από το νήμα, στη χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως t_1 .
- Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 .



Τη χρονική στιγμή t_1 το νήμα κόβεται ακαριαία και το σώμα Σ_1 συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = \frac{m_1}{3}$ που

είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα Σ_2 πριν την κρούση, εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο δάπεδο με περίοδο $T = 1 \text{ s}$ και η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσής του ήταν $d = 1 \text{ m}$. Τη στιγμή της κρούσης το σώμα Σ_2 βρισκόταν στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

- Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- Το χρονικό διάστημα που απαιτείται, ώστε η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος να γίνει τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσής του, για δεύτερη φορά, μετά την κρούση.
- Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.

Να θεωρήσετε ότι το νήμα δεν γλιστρά πάνω στην τροχαλία κατά τη διάρκεια της περιστροφής της. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Κατά την κρούση το συσσωμάτωμα που δημιουργείται δεν αναπηδά στο οριζόντιο δάπεδο. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\pi^2 = 10$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$.

ΛΥΣΗ

- Οι δυνάμεις που είναι υπεύθυνες για την κίνηση του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ_1 , φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό ισχύει: $T = T'$. Για την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T' \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \stackrel{T=T'}{\Rightarrow} T = \frac{1}{2}MR \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad ①$$

Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος Σ_1 εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F = m_1 \cdot a \Rightarrow B_1 - T = m_1 \cdot a \Rightarrow m_1 g - T = m_1 \cdot a \quad ②$$

$$\text{Από } ① \text{ και } ② \Rightarrow m_1 g = \frac{1}{2}MR \alpha_{\gamma\omega\nu} + m_1 a \quad ③$$

Επειδή το νήμα δεν γλιστρά πάνω στην τροχαλία ισχύει: $a = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$.

$$\text{Οπότε } ③ \Rightarrow m_1 g = \frac{1}{2}M a + m_1 a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2.$$

- Επειδή $a = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10 \text{ rad/s}^2$.

- Αν ω_1 η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 , ισχύει:

$$L_1 = I \cdot \omega_1 \Rightarrow L_1 = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = 4 \text{ rad/s}.$$

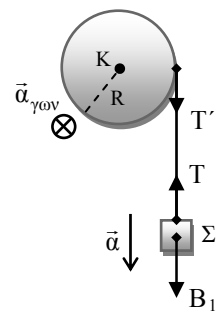
Για την ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $v_1 = \omega_1 \cdot R \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$K = K_{m_1} + K_{\text{τροχ}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I \omega_1^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \omega_1^2 \Rightarrow K = 8 \text{ J}.$$

- Το σώμα Σ_1 έως τη στιγμή t_1 εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση οπότε $v_1 = a \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 0,4 \text{ s}$.

Για το ύψος h_1 ισχύει: $h_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow h_1 = 0,4 \text{ m}$.



ε. Από ① $\Rightarrow T = \frac{1}{2} MR \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = 10 \text{ N}$. Οπότε $T' = 10 \text{ N}$.

Το έργο της τάσης του νήματος που δέχεται η τροχαλία είναι:

$$W_{T'} = T' \cdot R \cdot \Delta\theta \Rightarrow W_{T'} = T' \cdot \Delta S \Rightarrow W_{T'} = T' \cdot h_1 \Rightarrow W_{T'} = 4 \text{ J}.$$

ζ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\tau \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = T' \cdot R \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 20 \text{ J/s}.$$

η. Τη στιγμή της κρούσης το σώμα Σ_1 έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου v_1 με φορά προς τα κάτω και το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του, άρα έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_{\max} = \omega_\tau \cdot A$. Για την ταλάντωση του σώματος Σ_2 πριν την κρούση γνωρίζουμε ότι:

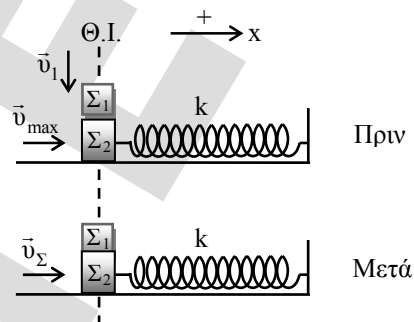
$$\omega_\tau = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_\tau = 2\pi \text{ rad/s} \text{ και } A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

οπότε $v_{\max} = \pi \text{ m/s}$.

Κατά την κρούση, το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι μονωμένο στην οριζόντια διεύθυνση (άξονας $x'x$).

Οπότε η ολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή στην οριζόντια διεύθυνση. Δηλαδή

$$\vec{p}_{x'x, \text{ολ}, \text{Πριν}} = \vec{p}_{x'x, \text{ολ}, \text{Μετά}} \Rightarrow m_2 v_{\max} = (m_1 + m_2) v_\Sigma \Rightarrow v_\Sigma = \frac{\pi}{4} \text{ m/s}.$$



θ. Το νέο ταλαντευόμενο σύστημα συσσωμάτωμα-ελατήριο είναι οριζόντιο άρα έχει θέση ισορροπίας στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπως και το προηγούμενο ταλαντευόμενο σύστημα σώμα Σ_2 -ελατήριο. Οπότε η ταχύτητα v_Σ ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$\omega_\Sigma = \frac{2\pi}{T_\Sigma} \Rightarrow \omega_\Sigma = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad m_1 = 3m_2 \Rightarrow \omega_\Sigma = \sqrt{\frac{k}{4m_2}} \Rightarrow \omega_\Sigma = \frac{\omega_\tau}{2} \Rightarrow \omega_\Sigma = \pi \text{ rad/s}.$$

Οπότε για το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

$$v_\Sigma = \omega_\Sigma \cdot A_\Sigma \Rightarrow A_\Sigma = 0,25 \text{ m}.$$

ι. Για την εξίσωση απομάκρυνσης του συσσωματώματος, θεωρώντας ότι η ταλάντωση ξεκινά τη στιγμή $t'_0 = 0$ που το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, ισχύει:

$$x_\Sigma = A_\Sigma \cdot \eta\mu\omega_\Sigma t' \Rightarrow x_\Sigma = 0,25 \cdot \eta\mu\pi t' \text{ (S.I.)}$$

$$K = 3U \Rightarrow E - U = 3U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2} D A_\Sigma^2 = 4 \frac{1}{2} D x_\Sigma^2 \Rightarrow x_\Sigma = \pm \frac{A_\Sigma}{2} \Rightarrow A_\Sigma \eta\mu\omega_\Sigma t' = \pm \frac{A_\Sigma}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega_\Sigma t' = \pm \frac{1}{2}$$

το οποίο συμβαίνει για δεύτερη φορά όταν: $\omega_\Sigma t' = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t' = \frac{5}{6} \text{ s}.$

κ. Το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως πριν την κρούση έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{\text{ολ}, \text{Πριν}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{\max}^2 \Rightarrow K_{\text{ολ}, \text{Πριν}} = \frac{22}{3} \text{ J}.$$

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{\text{ολ}, \text{Μετά}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\Sigma^2 \Rightarrow K_{\text{ολ}, \text{Πριν}} = \frac{5}{6} \text{ J}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{K_{\text{ολ}, \text{Πριν}} - K_{\text{ολ}, \text{Μετά}}}{K_{\text{ολ}, \text{Πριν}}} 100\% \Rightarrow \Pi\% \cong 88,64\%.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ