

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + a^2$, $x, a \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.

β. Αν M το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να βρεθεί η τιμή του αριθμού a ώστε το σημείο M να απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(1, 0)$.

γ. Έστω $a = 0$

i. Αν ισχύει ότι η μέση τιμή των αριθμών $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{10})$ είναι ίση με 100 να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η μέση τιμή $\bar{x}$ των θετικών αριθμών $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

ii. Αν για τους n πλήθους αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$ ισχύει $\sum_{i=1}^n x_i = 40$, $n \cdot s^2 = 1280$ όπου s^2 η διακύμανση τους και $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1360$ να υπολογίσετε το πλήθος n των αριθμών $x_1, x_2, \dots, x_n$, την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής του

δείγματος. Είναι το δείγμα ομοιογενές; (Δίδεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\}$ και $\sqrt{101} \approx 10,05$)

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

O.E.

Η μονοτονία της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

Η f είναι γν.φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Το $f(0) = a^2$ είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

β. Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο είναι το $M(0, a^2)$.

Η απόσταση των σημείων M και A είναι: $(AM) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-a^2)^2} = \sqrt{1+a^4}$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(a) = 1 + a^4$ με $a \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(a)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Είναι $g'(a) = (1 + a^4)' = 4a^3$

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$g'(a) > 0 \Leftrightarrow 4a^3 > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

a	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(a)$	$-$	0	$+$
$g(a)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

O.E.

Η μονοτονία της $g(a)$ φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

Άρα για $a = 0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο οπότε για $a = 0$ η απόσταση (AM) γίνεται ελάχιστη.

γ. i. Είναι $f(x) = x^2$ με $x \in \mathbb{R}$. Η μέση τιμή $\bar{x}_\mu$ των αριθμών $f(x_1), \dots, f(x_{10})$ είναι ίση με 100 οπότε:

$$\bar{x}_\mu = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{10})}{10} \Leftrightarrow 100 = \frac{x_1^2 + \dots + x_{10}^2}{10}$$

Η διασπορά s^2 των θετικών αριθμών $x_1, \dots, x_{10}$ είναι:

$$s^2 = \frac{1}{10} \left\{ \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{10} \right\} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{10^2} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \right)^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - \bar{x}^2 \stackrel{\bar{x} > 0}{=} 100 - \bar{x}^2$$

Πρέπει $100 - \bar{x}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \bar{x}^2 \leq 100 \Leftrightarrow |\bar{x}| \leq 10 \Leftrightarrow 0 < \bar{x} \leq 10$. Επομένως η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{100 - \bar{x}^2}$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει να ισχύει για τον συντελεστή μεταβολής:

$$CV \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{100 - \bar{x}^2}}{|\bar{x}|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{100 - \bar{x}^2}{\bar{x}^2} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 10000 - 100\bar{x}^2 \leq \bar{x}^2 \Leftrightarrow 10000 \leq 101\bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 \geq \frac{10000}{101}$$

$$\Leftrightarrow |\bar{x}| \geq \frac{100\sqrt{101}}{101} \stackrel{\bar{x} > 0}{\Leftrightarrow} \bar{x} \geq \frac{100\sqrt{101}}{101} \quad \text{Άρα} \quad \frac{100\sqrt{101}}{101} \leq \bar{x} \leq 10$$

ii. Είναι $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1360 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1360$. Είναι $s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$ οπότε

$$\frac{1280}{n} = \frac{1360}{n} - \left(\frac{40}{n} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{80}{n} = \frac{1600}{n^2} \Leftrightarrow 80n^2 = 1600n \Leftrightarrow n(80n - 1600) = 0 \stackrel{n > 0}{\Leftrightarrow} 80n = 1600 \Leftrightarrow n = \frac{1600}{80} \Leftrightarrow n = 20$$

Επομένως η διακύμανση είναι $20 \cdot s^2 = 1280 \Leftrightarrow s^2 = \frac{1280}{20} \Leftrightarrow s^2 = 64$ οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = 8$. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{40}{20} = 2. \text{ Ο συντελεστής μεταβολής είναι } CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{8}{2} = 4 > \frac{1}{10}. \text{ Οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2xP(B') - 2P(B)}{x^2 - 1} & \text{αν } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{5}{3} - P(A) & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{η οποία είναι συνεχής.}$$

α. Να αποδείξετε ότι $P(A') + P(B') = \frac{4}{3}$.

β. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η διάμεσος δ των αριθμών: $P(A), P(B), -2, P(A \cup B), 2, P(A \cap B)$.

γ. Αν επιπλέον $P(A) = P(B)$ τότε δείξτε ότι $f(1) + f'(3) = 2$.

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2xP(B') - 2P(B)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x(1 - P(B)) - 2P(B)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x + 2xP(B) - 2P(B)}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x-1) + 2P(B)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (2x + 2P(B))}{(x-1)(x+1)} = \frac{2 + 2P(B)}{2} = 1 + P(B). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 + P(B) = \frac{5}{3} - P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - P(A') + 1 + P(B') = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A') + P(B') = \frac{4}{3}$$

β. Είναι $\bar{x} = \frac{P(A) + P(B) + 2 - 2 + P(A \cup B) + P(A \cap B)}{6}$

$$\text{Ισχύει: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{Άρα } \bar{x} = \frac{P(A) + P(B) + P(A) + P(B)}{6} = \frac{2(P(A) + P(B))}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}.$$

Τοποθετούμε τους αριθμούς κατά αύξουσα σειρά:

$$-2, P(A \cap B), P(A), P(B), P(A \cup B), 2 \quad \text{ή} \quad -2, P(A \cap B), P(B), P(A), P(A \cup B), 2$$

$$\text{οπότε σε κάθε περίπτωση η διάμεσος είναι } \delta = \frac{P(A) + P(B)}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

γ. Από α. $P(A) + P(B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A) + P(A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$ οπότε $P(B) = \frac{1}{3}$. Άρα $f(1) = \frac{5}{3} - P(A) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

$$\text{Είναι } P(B') = 1 - P(B) = \frac{2}{3} \text{ οπότε } f(x) = \frac{2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 - 1}, x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\left(2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right)' \cdot (x^2 - 1) - \left(2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\left(4x - \frac{4}{3}\right) \cdot (x^2 - 1) - \left(2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{Άρα } f'(3) = \frac{\frac{4}{3} \cdot 3^2 - \frac{8}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3}}{(3^2 - 1)^2} = \frac{12 - 8 + \frac{4}{3}}{8} = \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Οπότε } f(1) + f'(3) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ
ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ •
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ