

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), \dots, f_v(x)$, $v \in \mathbb{N}^*$ όπου $f_k(x) = kx^2 - 2kx + k^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, v$

A. Να δείξετε ότι $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x-1)^2 + 2k$, $x \in \mathbb{R}$

B. Αν η ελάχιστη τιμή της διαμέσου των αριθμών $f_1(x), f_2(x), \dots, f_v(x)$ είναι 7

i. Να βρείτε το v .

ii. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, v\}$ όπου οι πιθανότητες $P(1), P(2), \dots, P(v)$ των στοιχειωδών ενδεχομένων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{k \in \Omega : \text{η εφαπτομένη της } C_{f_k} \text{ στο } (1, f_k(1)) \text{ διέρχεται από το } O(0,0)\}$

$B = \{k \in \Omega : \text{η } f_k(x) \text{ έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες}\}$

Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

ΛΥΣΗ

A. Είναι: $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (k+1)x^2 - 2(k+1)x + (k+1)^2 - 2 - kx^2 + 2kx - k^2 + 2 = x^2 - 2x + 2k + 1 = (x-1)^2 + 2k$, $x \in \mathbb{R}$

B. i. Από **A.** έχουμε $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x-1)^2 + 2k > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού $k \in \mathbb{N}^*$. Άρα $f_1(x) < f_2(x) < \dots < f_v(x)$.

• Αν v άρτιος τότε:

$$\delta(x) = \frac{f_v(x) + f_{\frac{v}{2}+1}(x)}{2} = \frac{\frac{v}{2}x^2 - 2\frac{v}{2}x + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 2 + \left(\frac{v}{2}+1\right)x^2 - 2\left(\frac{v}{2}+1\right)x + \left(\frac{v}{2}+1\right)^2 - 2}{2}$$

$$= \frac{(v+1)x^2 - 2(v+1)x + \frac{v^2}{2} + v - 3}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Η } \delta(x) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως πολυωνυμική με}$$

$$\delta'(x) = (v+1)x - (v+1). \text{ Οπότε } \delta'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα η διάμεσος γίνεται ελάχιστη για $x = 1$. Συνεπώς:

$$\delta(1) = 7 \Leftrightarrow \frac{(v+1) - 2(v+1) + \frac{v^2}{2} + v - 3}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{2} - 4 = 14 \Leftrightarrow v^2 = 36 \Leftrightarrow v = 6 \text{ δεκτή.}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\delta'(x)$	-	0	+
$\delta(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

• Αν v περιττός τότε: $\delta(x) = f_{\frac{v+1}{2}}(x) = \frac{(v+1)}{2}x^2 - 2\frac{v+1}{2}x + \left(\frac{v+1}{2}\right)^2 - 2$. Η $\delta(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $\delta'(x) = (v+1)x - (v+1)$.

Οπότε $\delta'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα η διάμεσος γίνεται ελάχιστη

$$\text{για } x=1. \text{ Συνεπώς: } \delta(1) = 7 \Leftrightarrow \frac{v+1}{2} - (v+1) + \frac{(v+1)^2}{4} - 2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2(v+1) - 4(v+1) + v^2 + 2v + 1 = 36 \Leftrightarrow v^2 = 37 \Leftrightarrow v = \sqrt{37} \text{ απορρίπτεται. Άρα } v = 6$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\delta'(x)$	-	0	+
$\delta(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

ii. Από ερώτημα **B(i)** $v = 6$ άρα $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ και από αξιωματικό ορισμό πιθανότητας: $\sum_{i=1}^6 P(i) = 1$ με

$$\sum_{i=1}^6 P(i) \text{ άθροισμα 6 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με } a_1 = P(1) \text{ και } \lambda = 2. \text{ Τελικά } P(1) \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 1$$

$$\text{άρα } P(1) = \frac{1}{63}, P(2) = \frac{2}{63}, P(3) = \frac{2^2}{63} \dots$$

• Η εφαπτομένη της C_{f_k} στο $(1, f_k(1))$ είναι: $(\varepsilon): y - f_k(1) = f'_k(1)(x-1)$ με $f_k(1) = k^2 - k - 2$ και $f'_k(1) = 0$

Τελικά η $(\varepsilon): y = f_k(1)$ διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ αν $f_k(1) = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ ή $k = -1$ με $k \in \Omega$ άρα $A = \{2\}$

• Η $f_k(x)$ έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 4k(k^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow$

$$4k(k - k^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 < 0 \Leftrightarrow k = 1. \text{ Οπότε } B = \{1\} \text{ και } A \cup B = \{1, 2\}$$

$$\text{Τελικά: } P(A \cup B) = P(1) + P(2) = \frac{1}{63} + \frac{2}{63} = \frac{3}{63} = \frac{1}{21}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα δείγμα μεγέθους n με παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχει μέση τιμή $\bar{x} \neq 0$ και διασπορά s^2 .

Αν $\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = n^2 \bar{x}$ και $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i = 1$ τότε:

A. Να δείξετε ότι $\bar{x}^2 + s^2 = 1$

B. Να δείξετε ότι $\bar{x} < 0$

Γ. Αν επιπλέον δίνεται ότι, ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι 0,75 τότε

i. Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$, την τυπική απόκλιση s και το πλήθος n του δείγματος

ii. Αν η διάμεσος $\delta = -\frac{1}{2}$, οι δύο μικρότερες παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους και η μεγαλύτερη παρατήρηση είναι ίση με το 0 να βρείτε το δείγμα.

$$\text{Δίνεται ότι } s^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right]$$

ΛΥΣΗ

$$\text{A. } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n \cdot \bar{x} \quad \text{και} \quad s^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n^2} \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = n(\bar{x}^2 + s^2). \text{ Όμως: } \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = n^2 \bar{x} \Leftrightarrow n(\bar{x}^2 + s^2) \cdot n\bar{x} = n^2 \bar{x} \Leftrightarrow n^2 \bar{x}(\bar{x}^2 + s^2) = n^2 \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}^2 + s^2 = 1$$

$$\text{B. Έχουμε: } \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i = 1 \Leftrightarrow n(\bar{x}^2 + s^2) + n\bar{x} = 1 \stackrel{(A)}{\Leftrightarrow} n + n\bar{x} = 1 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1-n}{n} \text{ με } n \geq 1.$$

Αν $n=1$ τότε $\bar{x} = 0$, απορρίπτεται. Αν $n > 1$ τότε $\frac{1-n}{n} < 0$ άρα $\bar{x} < 0$

$$\text{Γ. i. } \bar{x}^2 + s^2 = 1 \stackrel{\bar{x} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 + \frac{s^2}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \Leftrightarrow 1 + CV^2 = \frac{1}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{75}{100} \right)^2} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{16}{25} \stackrel{\bar{x} < 0}{\Leftrightarrow} \bar{x} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Ακόμα } \bar{x} = \frac{1-n}{n} \text{ άρα } n=5 \text{ και } \bar{x}^2 + s^2 = 1 \Leftrightarrow s^2 = \frac{9}{25} \stackrel{s > 0}{\Leftrightarrow} s = \frac{3}{5}$$

ii. Οι παρατηρήσεις είναι 5 άρα η διάμεσος $\delta = -\frac{1}{2}$ είναι ίση με την 3^η παρατήρηση. Ακόμα οι δύο μικρότερες παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους και η μεγαλύτερη παρατήρηση είναι ίση με το 0. Άρα οι δυνατές τιμές του δείγματος κατά αύξουσα σειρά μπορεί να είναι: $x, x, -\frac{1}{2}, y, 0$. Ακόμη έχουμε:

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 5(\bar{x}^2 + s^2) \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{1}{4} + y^2 = 5 \quad (1) \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 5\bar{x} \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{2} + y = -4 \quad (2). \text{ Από (1) και (2) έχουμε: } -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ