

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ οι πιθανότητες πραγματοποίησης δύο μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων A, B ενός δειγματικού χώρου

Ω . Αν ισχύουν $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ και $P(A) + P(B) = \frac{2}{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- Να ορίσετε την $f(x) = P(A \cap B)$
- Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να δείξετε ότι $4P(A \cap B) \leq 1$
- Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «κανένα από τα ενδεχόμενα A, B δεν πραγματοποιείται», όταν η $P(A \cap B)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

α. Είναι $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ αλλά

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{x^2 + 3}, \text{ οπότε } P(A \cap B) = \frac{9 - x^2}{12(x^2 + 3)}. \text{ Άρα } f(x) = \frac{9 - x^2}{12(x^2 + 3)}. \text{ Είναι } 0 < P(A \cap B) < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{9 - x^2}{12(x^2 + 3)} < 1.$$

$$\text{Όμως } 12(x^2 + 3) > 0. \text{ Άρα } 0 < 9 - x^2 < 12x^2 + 36 \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ 13x^2 + 27 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{9 - x^2}{12(x^2 + 3)} \text{ με } x \in (-3, 3)$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$ ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{9 - x^2}{x^2 + 3} \right)' = \frac{1}{12} \cdot \frac{(9 - x^2)'(x^2 + 3) - (9 - x^2)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}, x \in (-3, 3). \text{ Οπότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$			+	-	
$f(x)$			↗	↘	

μέγιστο

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-3, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$ το $f(0) = \frac{1}{4}$.

γ. Η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή όταν $x=0$. Άρα για κάθε $x \in (-3, 3)$ ισχύει $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4P(A \cap B) \leq 1$.

δ. Έστω Γ το ενδεχόμενο: «κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται», τότε $\Gamma = (A \cup B)'$. Η $P(A \cap B)$ παίρνει τη μέγιστη

τιμή της όταν $x=0$ και είναι $P(A \cap B) = f(0) = \frac{1}{4}$ και $P(A) + P(B) = \frac{2}{0+3} = \frac{2}{3}$. Οπότε,

$$P(\Gamma) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{N} / f''(x) - 5f'(x) - 6f(x) \leq 0\}$ που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

- Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω
- Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$A = \{\lambda \in \Omega / f''(x) = 9f(x)\}, \quad B = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = 2 \right\}$$

$$\Gamma = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{f''(x) + 2f'(x) - 3f(x)}{f'(x) - f(x)} = 4 \right\}$$

Λύση

α. Έχουμε $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, οπότε

$$f''(x) - 5f'(x) - 6f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - 5\lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} \leq 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} (\lambda^2 - 5\lambda - 6) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 \leq 0, \text{ αφού } e^{\lambda x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } -1 \leq \lambda \leq 6, \text{ όμως } \lambda \in \mathbb{N} \text{ οπότε } \Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

β. Για το ενδεχόμενο Α έχουμε: $f''(x) = 9f(x) \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} = 9e^{\lambda x} \Leftrightarrow (\lambda^2 - 9)e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$. Άρα $A = \{3\}$, τότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{7}$.

$$\text{Για το ενδεχόμενο Β έχουμε: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = 2 \Leftrightarrow f'(0) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2, \text{ άρα } B = \{2\}, \text{ επομένως } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{7}.$$

Για το ενδεχόμενο Γ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{f''(x) + 2f'(x) - 3f(x)}{f'(x) - f(x)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 3e^{\lambda x}}{\lambda e^{\lambda x} - e^{\lambda x}} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\lambda^2 + 2\lambda - 3}{\lambda - 1} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 + 2\lambda - 3}{\lambda - 1} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1. \text{ Όμως } \lambda \neq 1, \text{ άρα } \Gamma = \emptyset \text{ με } P(\Gamma) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{(2x-1)^3} + se^{-x} - \beta$, με s η τυπική απόκλιση των θετικών παρατηρήσεων $x_i, i = 1, \dots, n$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρεθούν τα s και β ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2 να ισούται με $-2 - 2e^{-2}$ και το σημείο $B(1, 0)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ. Για $s = 2$, να βρεθεί η μικρότερη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων $x_i, i = 1, \dots, n$ ώστε όταν αυτές αυξηθούν κατά 10%, το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Λύση

α. Πρέπει $\frac{1}{(2x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2(2x-1) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Άρα η f ορίζεται στο $A = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Τότε

$$f(x) = -3\ln(2x-1) + se^{-x} - \beta$$

β. Το σημείο $B(1, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , άρα $f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 + se^{-1} - \beta = 0 \Leftrightarrow se^{-1} - \beta = 0$ (1). Επίσης

$$f'(x) = -3 \frac{(2x-1)'}{2x-1} + s(e^{-x})' = \frac{-6}{2x-1} - se^{-x} = -6(2x-1)^{-1} - se^{-x}$$

$$f'(2) = -2 - 2e^{-2} \Leftrightarrow -6 \frac{1}{3} - se^{-2} = -2 - 2e^{-2} \Leftrightarrow s = 2$$

Τότε η (1) γράφεται $\beta = 2e^{-1}$

γ. Έστω $y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i = 1,1x_i$ οι τιμές των παρατηρήσεων μετά την αύξηση. Τότε $\bar{y} = 1,1\bar{x}$ και $s_y = 1,1s_x$ και

$$CV_y \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1,1s_x}{1,1|\bar{x}|} \leq 0,1 \Leftrightarrow s_x \leq 0,1\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} \geq \frac{2}{0,1} \Leftrightarrow \bar{x} \geq 20 \text{ και αφού θέλουμε τη μικρότερη τιμή, τότε}$$

$$\bar{x} = 20.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΛΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ