

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{\kappa}{3}x^3 + \lambda x$ με $x \in \mathbb{R}$ και κ, λ παίρνουν τιμές στο σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

A. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

B. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα ζευγάρι τιμών (λ, κ) από το σύνολο A , να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. B : «η παραπάνω εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ ».

ii. Γ : «η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $\left(2, \frac{2\kappa}{3}\right)$ ».

iii. Αν 10 σημεία της παραπάνω εφαπτομένης έχουν τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ με μέση τιμή $\bar{x} = \frac{22}{3}$ και τυπική απόκλιση $s_x = 0,8$, βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ : «Οι τεταγμένες των παραπάνω σημείων έχουν $CV_y = 0,1$ ».

iv. E : «τα ενδεχόμενα B και Δ πραγματοποιούνται συγχρόνως».

Γ. Αν τα ενδεχόμενα B και Δ πραγματοποιούνται συγχρόνως να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΛΥΣΗ

A. $f'(x) = -\kappa x^2 + \lambda, x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f(1) = -\frac{\kappa}{3} \cdot 1^3 + \lambda \cdot 1 = \lambda - \frac{\kappa}{3}$ και $f'(1) = -\kappa \cdot 1^2 + \lambda = \lambda - \kappa$. Άρα η εφαπτομένη της

$$C_f \text{ στο } (1, f(1)) \text{ είναι: } y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \left(\lambda - \frac{\kappa}{3}\right) = (\lambda - \kappa)(x - 1) \Leftrightarrow y = (\lambda - \kappa)x + \kappa - \lambda + \lambda - \frac{\kappa}{3}$$

$$\Leftrightarrow y = (\lambda - \kappa)x + \frac{2\kappa}{3}.$$

B.

$\lambda \backslash \kappa$	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,1)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα διπλής εισόδου με $N(\Omega) = 16$

i. Επειδή, σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ έχουμε: $(\lambda - \kappa) = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \lambda - \kappa = 1$.

$$\text{Άρα } B = \{(2,1), (3,2), (4,3)\} \text{ με } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{16}.$$

ii. Επειδή, διέρχεται η εφαπτομένη από το σημείο $\left(2, \frac{2\kappa}{3}\right)$ έχουμε: $\frac{2\kappa}{3} = (\lambda - \kappa) \cdot 2 + \frac{2\kappa}{3} \Leftrightarrow \lambda - \kappa = 0 \Leftrightarrow \lambda = \kappa$.

$$\text{Άρα } \Gamma = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

iii. Τα σημεία της εφαπτομένης είναι της μορφής $(x_i, y_i) = \left(x_i, (\lambda - \kappa)x_i + \frac{2\kappa}{3}\right), i = 1, \dots, 10$. Οι τεταγμένες των

σημείων έχουν μέση τιμή $\bar{y} = (\lambda - \kappa)\bar{x} + \frac{2\kappa}{3} = \frac{22(\lambda - \kappa)}{3} + \frac{2\kappa}{3}$ και τυπική απόκλιση

$$s_y = |\lambda - \kappa| \cdot s_x = 0,8 |\lambda - \kappa|.$$

$$\text{Έχουμε } CV_y = 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} = 0,1 \Leftrightarrow s_y = 0,1 |\bar{y}| \Leftrightarrow 0,8 |\lambda - \kappa| = 0,1 \left| \frac{22(\lambda - \kappa)}{3} + \frac{2\kappa}{3} \right|$$

$$\Leftrightarrow 24 |\lambda - \kappa| = |22\lambda - 22\kappa + 2\kappa| \Leftrightarrow 24 |\lambda - \kappa| = |22\lambda - 20\kappa| \Leftrightarrow 12(\lambda - \kappa) = |11\lambda - 10\kappa|$$

- Αν $12(\kappa - \lambda) = 11\lambda - 10\kappa \Leftrightarrow 12\kappa + 10\kappa = 12\lambda + 11\lambda \Leftrightarrow 22\kappa = 23\lambda \Leftrightarrow \kappa = \frac{23}{22}\lambda$. Άρα δεν υπάρχουν ζεύγη (κ, λ) του δειγματικού χώρου Ω που να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση.
- Αν $12(\lambda - \kappa) = 11\lambda - 10\kappa \Leftrightarrow 12\lambda - 11\lambda = 12\kappa - 10\kappa \Leftrightarrow \lambda = 2\kappa$. Άρα $\Delta = \{(2,1), (4,2)\}$ με $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

iv. $E = B \cap \Delta = \{(2,1)\}$ με $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{1}{16}$

Γ. Όταν πραγματοποιείται η τομή $B \cap \Delta$ ισχύει $\lambda = 2, \kappa = 1$. Άρα

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-
f					
		$\tau.\varepsilon$		$\tau.\mu$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\sqrt{2}]$ και στο $[\sqrt{2}, +\infty)$. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -\sqrt{2}$ το $f(-\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ και τοπικό μέγιστο για $x = \sqrt{2}$ το $f(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω A, B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ με $P(\omega_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ για τα οποία ισχύει: $P(B) = P(A)(\ln P(A) - 1) + \frac{1}{e} + 1$. (1). Να δείξετε ότι $A' = B$.

ΛΥΣΗ

Τα A, B είναι ασυμβίβαστα οπότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Όμως $P(B) + P(A) = P(A) \ln P(A) + \frac{1}{e} + 1$. Άρα $P(A \cup B) = P(A) \ln P(A) + \frac{1}{e} + 1$ θεωρούμε συνάρτηση

$f(x) = x \ln x + \frac{1}{e} + 1, x \in (0, 1]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1]$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $f'(x) = \ln x + 1$ και

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	1
f'	-	0	+
f			

Άρα $f(x) \geq f(e^{-1}), \forall x \in (0, 1]$ δηλαδή $f(x) \geq 1, \forall x \in (0, 1]$. Όμως $P(A \cup B) = f(P(A)) \geq 1$. Συνεπώς, $P(A \cup B) = 1$ και $P(A) = e^{-1}$. Θα δείξουμε ότι $A \cup B = \Omega$. Έστω ότι υπάρχει $\omega_k \in \Omega$ με $\omega_k \notin A \cup B$. Τότε $A \cup B \subseteq \Omega - \{\omega_k\}$ οπότε $P(A \cup B) \leq P(\Omega - \{\omega_k\}) = P(\Omega) - P(\omega_k) < 1$ αφού $P(\omega_k) > 0$. Δηλαδή $P(A \cup B) < 1$ άτοπο.

Άρα $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή $A' = B$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ