

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 7**
- A2.** Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A . **Μονάδες 4**
- A3.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$. **Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων. (Μονάδες 2)
- β.** Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$. (μονάδες 2)
- γ.** Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$. (μονάδες 2)
- δ.** Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2)
- ε.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta x = \eta x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



- B1.** Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. **Μονάδες 4**
- B2.** Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
$[5, \dots)$		$\alpha + 4$			
$[\dots, \dots)$		$3\alpha - 6$			
$[\dots, \dots)$		$2\alpha + 8$			
$[\dots, 45)$		$\alpha - 2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

- B3.** Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. (Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$) **Μονάδες 8**
- B4.** Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3n}{n^2 + 1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{n+2}{n^2 + 1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{n+1}{n^2 + 1}$
- μια τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $n = 3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$, $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKM\Lambda$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 10$ της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$ να αποδείξετε ότι $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31

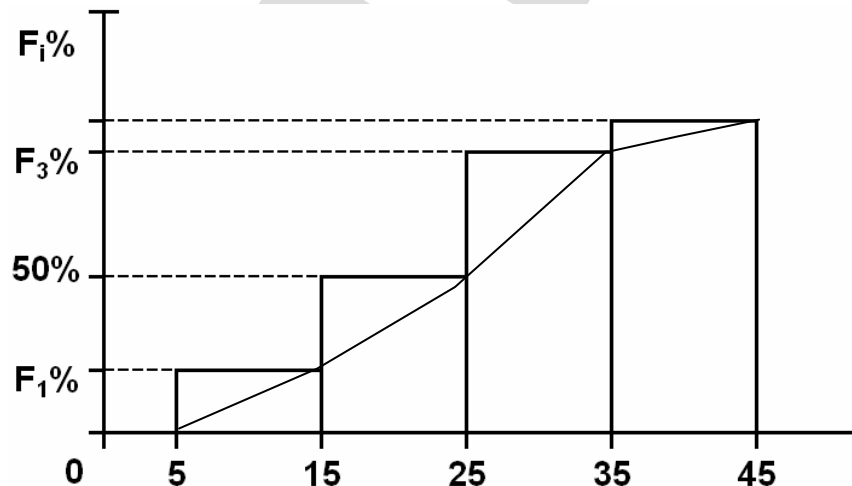
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 148

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 96

Α4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.



εκπαιδευτικός οργανισμός

Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων βλέπουμε ότι $\delta = 25$.

B2. Αφού η διάμεσος ταυτίζεται με το άνω όριο της δεύτερης κλάσης τότε :

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = 6 - 4 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8.$$

Επομένως:

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Συνολο	-	60	100	-	-

B3. $\bar{x} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{1440}{60} = 24$

$$s^2 = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60} = \frac{2352 + 288 + 864 + 1536}{60} = \frac{5040}{60} = 84$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \approx 9.17$

B4. Κατά την ομαδοποίηση υποθέτουμε ότι οι τιμές σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα. Από 37 έως 45 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα χρειάζεται το $\frac{8}{10} \cdot f_4 \% = 8\%$ των μαθητών.

Σχόλιο : Το **B4** μπορεί να λυθεί και με όμοια τρίγωνα.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα Γ : ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά και I : ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά.

Γ1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2) \cdot (\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+3}+2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2-1)}{x(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+3}+2)} = 1.$

Άρα $P(\Gamma \cup I) = 1.$

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα $\Gamma \cup I = \Omega$ άρα $\Gamma \cup I$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. Από προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow 1 = \frac{3v}{v^2+1} + \frac{v+2}{v^2+1} - \frac{v+1}{v^2+1} \Leftrightarrow$$

$$v^2+1 = 3v+1 \Leftrightarrow v^2-3v=0 \Leftrightarrow v(v-3)=0 \stackrel{v \geq 3}{\Leftrightarrow} v=3.$$

Γ3. Επειδή $(\Gamma \cup I) \cap (I \cup \Gamma) = \emptyset$ από απλό προσθετικό νόμο έχουμε

$$P((\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)) = P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(I \cap \Gamma) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I) =$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Γ4. Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, από κλασικό ορισμό πιθανότητας έχουμε

$$P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}, x > 0$

Για κάθε $x > 0$ η f παραγωγίζεται ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0$$

x	0	e	$+\infty$
f'		0	-
f			

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = e$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
- Δ2.** Έχουμε $K(x, 0)$ και $\Lambda(0, f(x))$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E(x) = xf(x) = 1 + \ln^2 x$, $x > 0$.
 $E'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Η συνάρτηση E έχει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.
- Δ3.** Έχουμε $f'(1) = -1$, άρα $\lambda = -1$.
Τότε $\varepsilon : y = -x + \beta$.
Επομένως $\bar{y} = -\bar{x} + \beta = -10 + \beta$ και $s_y = |-1|s_x = s_x = 2$.
 $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{|-10 + \beta|}$.
Αρκεί $CV_y \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|-10 + \beta|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 \leq |-10 + \beta| \Leftrightarrow -10 + \beta \geq 20$ ή $-10 + \beta \leq -20$ άρα $\beta \geq 30$ ή $\beta \leq -10$.
Τελικά $\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$.
- Δ4.** Επειδή $A \neq \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$ έχουμε ότι $0 < P(A) \leq 1$ και $0 < P(A \cup B) \leq 1$.
 $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \leq P(A \cup B)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ (1).
Ομοίως $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$ (2).
Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ