

Άσκηση 1

Έστω 2500 παρατηρήσεις $t_1, t_2, \dots, t_{2500}$ οι οποίες κατανέμονται κανονικά. 1700 από αυτές βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 80 και 120 οι οποίοι είναι κάποιες από τις χαρακτηριστικές τιμές $\bar{x}, \bar{x} \pm s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm 3s$ της κανονικής κατανομής.

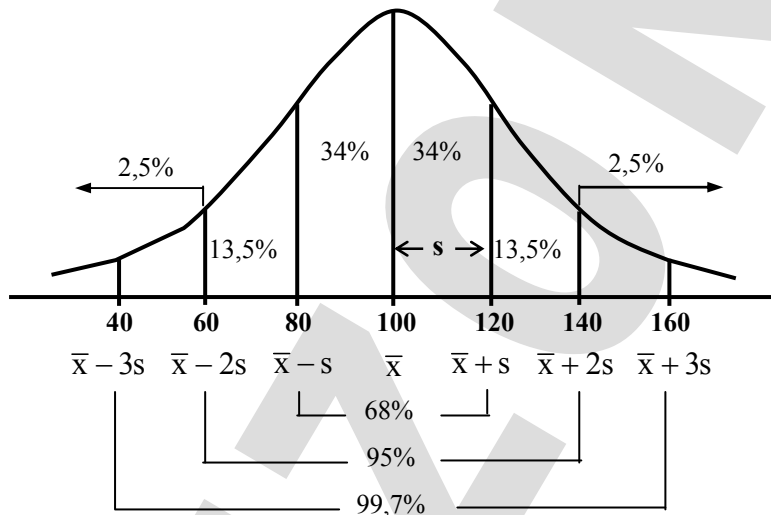
- Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s_x των παρατηρήσεων.
- Να βρείτε πόσες από τις παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 80.
- Να βρείτε την πιθανότητα μια παρατήρηση που επιλέγουμε τυχαία να είναι από 80 ως 100 ή μεγαλύτερη του 140.
- Να δείξετε ότι για όλες τις παρατηρήσεις ισχύει ότι: $-900 \leq t_i \leq 1100$, $i = 1, 2, \dots, 2500$.
- Να βρείτε ποιόν θετικό αριθμό $\alpha \neq 100$ πρέπει να αφαιρέσουμε από κάθε παρατήρηση ώστε να μην αλλάξει η ομοιογένεια του δείγματος.

Λύση

- Η κατανομή των παρατηρήσεων είναι κανονική και $\frac{1700}{2500} = 0,68 = 68\%$ των παρατηρήσεων βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 80 και 120. Συνεπώς:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} - s_x = 80 \\ \bar{x} + s_x = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\bar{x} = 200 \\ s_x = 120 - \bar{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{x} = 100 \\ s_x = 20 \end{array} \right\}$$

- Η κανονική κατανομή είναι μια συμμετρική κατανομή. Άρα όσες παρατηρήσεις βρίσκονται κάτω από το $\bar{x} - s_x = 80$ θα βρίσκονται και πάνω από $\bar{x} + s_x = 120$. Άρα μικρότερες του 80 είναι $\frac{2500 - 1700}{2} = 400$ παρατηρήσεις.
- Η κατανομή των παρατηρήσεων είναι κανονική. Άρα ισχύουν τα παρακάτω:



Έστω A το ενδεχόμενο η παρατήρηση που επιλέγουμε να είναι από 80 ως 100 και B το ενδεχόμενο η παρατήρηση να είναι μεγαλύτερη του 140. Το ενδεχόμενο μια παρατήρηση που επιλέγουμε τυχαία να είναι από 80 ως 100 ή μεγαλύτερη του 140 είναι το $A \cup B$. Αφού $A \cap B = \emptyset$ από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 34\% + 2,5\% = 0,34 + 0,025 = 0,365$$

$$\text{iv. } s_x^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow 20^2 = \frac{1}{2500} \sum_{i=1}^{2500} (t_i - 100)^2 \Leftrightarrow (t_1 - 100)^2 + (t_2 - 100)^2 + \dots + (t_{2500} - 100)^2 = 1000000.$$

Αφού $(t_i - 100)^2 \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 2500$, πρέπει για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2500$ να ισχύει ότι:

$$(t_i - 100)^2 \leq 1000000 \Leftrightarrow |t_i - 100| \leq \sqrt{1000000} \Leftrightarrow -1000 \leq t_i - 100 \leq 1000 \Leftrightarrow -900 \leq t_i \leq 1100.$$

- Έστω ότι αφαιρούμε τον αριθμό $\alpha > 0$ από κάθε παρατήρηση. Οι νέες παρατηρήσεις θα είναι:

$$y_1 = x_1 - \alpha, y_2 = x_2 - \alpha, \dots, y_{2500} = x_{2500} - \alpha \text{ με μέση τιμή } \bar{y} = \bar{x} - \alpha = 100 - \alpha \text{ και τυπική απόκλιση } s_y = s_x = 20.$$

Για να μην μεταβληθεί η ομοιογένεια του δείγματος πρέπει να ισχύει:

$$CV_x = CV_y \Leftrightarrow \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{s_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{20}{100 - \alpha} \Leftrightarrow |100 - \alpha| = 100. \text{ Άρα: } 100 - \alpha = 100 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ που απορρίπτεται, ή}$$

$$100 - \alpha = -100 \Leftrightarrow \alpha = 200 \text{ που είναι δεκτή.}$$

Άσκηση 2

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , με $P(A \cap B) \neq 0$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{P(A)+P(B)}{3P(A \cap B)} x^2 + \frac{5}{6P(A \cap B)} x - \frac{1}{P(A \cap B)}$$

η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

- Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .
- Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = -\frac{5}{3}$ να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B καθώς και τον τύπο της συνάρτησης f .
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $N(\alpha, f(\alpha))$.
- Αν A είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης (ϵ) με τον άξονα $y'y$, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν του τριγώνου OAM γίνεται ελάχιστο.

Λύση

- Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B είναι το $A \cup B$.

Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ ισχύει:

$$f(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A)+P(B)}{3P(A \cap B)} + \frac{5}{6P(A \cap B)} - \frac{1}{P(A \cap B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2P(A) + 2P(B) + 5 - 6 = 2P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$2[P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

- $f'(x) = 2 \frac{P(A)+P(B)}{3P(A \cap B)} x + \frac{5}{6P(A \cap B)}$. Επειδή η f παρουσιάζει στο $x_0 = -\frac{5}{3}$ τοπικό ακρότατο έχουμε:

$$f'\left(-\frac{5}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{P(A)+P(B)}{3P(A \cap B)} \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6P(A \cap B)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{10(P(A)+P(B))}{9P(A \cap B)} = -\frac{5}{6P(A \cap B)} \Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{45}{60} \Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{3}{4}.$$

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι το $A \cap B$. Η πιθανότητα του είναι:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι: } f(x) = x^2 + \frac{10}{3}x - 4.$$

- $f'(x) = 2x + \frac{10}{3}$, $f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha - 4$, $f'(\alpha) = 2\alpha + \frac{10}{3}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) είναι:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \left(\alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha - 4\right) = \left(2\alpha + \frac{10}{3}\right)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \left(2\alpha + \frac{10}{3}\right)x - \alpha^2 - 4.$$

- Για $x = 0$ το $y = -\alpha^2 - 4 < 0$. Άρα η (ϵ) τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Oy' στο σημείο $A(0, -\alpha^2 - 4)$.
Όπως φαίνεται στο σχήμα, το εμβαδόν του τριγώνου OAM είναι:

$$(OAM) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (MB) = \frac{1}{2} |-\alpha^2 - 4| \cdot 1 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 4).$$

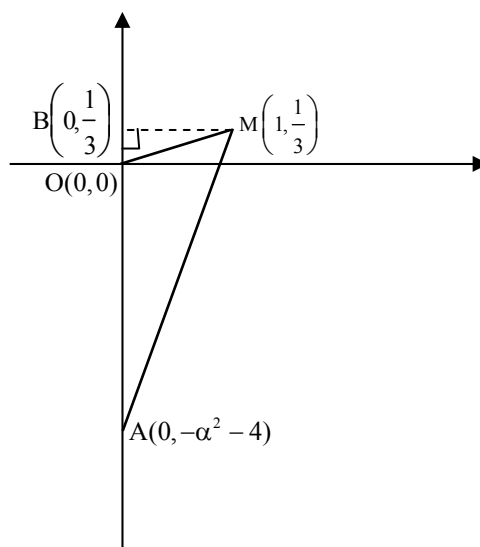
Έστω η συνάρτηση $g(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $g'(\alpha) = \alpha$.

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0. \quad g'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

α	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(\alpha)$	-	0	+
$g(\alpha)$			

ελάχιστο

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου OAM γίνεται ελάχιστο για $\alpha = 0$.



ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ