ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη

στο x_0 (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β]. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, με α<γ<β. (Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, x>0 (Μονάδες 2)

ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g: [α, β] $\to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f΄, g΄. Τότε ισχύει ότι:
$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx = ...$ με β>α>0 (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις f: $A \to \mathbb{R}$ και g: $B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε f(x) $\in$ B, τότε η σύνθεσή τους gof: $A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι:
(gof)΄(x)=... (Μονάδες 3)

γ) $\int_\alpha^\beta c\,dx = ...$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες Διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) f_i %	$x_i \nu_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	2κ+1			
Σύνολα	ν =25		100	

Β1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ

Μονάδες 4

Β2. Για κ=3 να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

Β3. Για κ=3 να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων. **Μονάδες 10**

Β4. Για κ=3 να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν} \quad x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν} \quad x \le 1 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **Μονάδες 5**

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **Μονάδες 10**

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(-1,2). **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f, αν F(0)=1 **Μονάδες 5**

Δ2. Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F.

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές F(2011) και F(2012) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ: 81

Α2. **α.** ➢ Σ **β.** ➢ Σ **γ.** ➢ Λ **δ.** ➢ Σ **ε.** ➢ Σ

Α3. **α.** $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x} dx = [\ln x]_\alpha^\beta = \ln\beta - \ln\alpha$

β. $(g o f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

γ. $\int_\alpha^\beta c\,dx = c[x]_\alpha^\beta = c(\beta - \alpha)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε ότι $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow 6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25 \Leftrightarrow 3\kappa = 9 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Β2.

x_i	v_i	Ni	$f_i\,\%$	$x_i v_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
Σύνολα	25	-	100	75

Β3. $\bar{x} = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5}{v} = \dfrac{75}{25} = 3$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή η 13η παρατήρηση. Άρα δ=3.

Β4. Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον τρεις ώρες ημερησίως είναι $f_3\%+f_4\%+f_5\%=56\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha x^2+\beta x)=\alpha+\beta$

Γ2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4}=$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(\sqrt{x+3}+2)=4$

Γ3. Για να είναι συνεχής στο $x_0=1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \alpha+\beta=4$. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α (-1,2) είναι $f(-1)=2\Leftrightarrow \alpha-\beta=2$. Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha-\beta=2\end{cases}\Rightarrow \alpha=3$ και $\beta=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $F(x)=x^3-x^2-x+c$

$F(0)=1\Leftrightarrow c=1$

Άρα, $F(x)=x^3-x^2-x+1$

Δ2. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πωλυωνυμική με $F'(x)=f(x)=3x^2-2x-1$

$F'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\dfrac{1}{3}$

Ο πίνακας μεταβολών της F είναι:

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	−	0	+	
$F(x)$		↗		↘		↗	

Η F είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$ και $[1,+\infty)$.

Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

Η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-\dfrac{1}{3}$ με τιμή $F\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1=\dfrac{32}{27}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=1$ με τιμή $F(1)=0$.

Δ.3. 2011, 2012 $\in[1,+\infty)$ στο διάστημα αυτό η F είναι γνησίως αύξουσα άρα $2011<2012\Leftrightarrow F(2011)<F(2012)$

Δ.4. Επειδή $F'(x)=f(x)$, ο πίνακας προσήμων της $F'(x)$ είναι ο πίνακας προσήμων της $f(x)$ από τον οποίο φαίνεται ότι $f(x)<0$ για $x\in[0,1]$. Άρα:

$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 -f(x)dx=-\int_0^1 F'(x)dx=-[F(x)]_0^1=-(0-1)=1$τ.μ.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ