

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή με $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^4 f(x)dx = 3$ και $g(x) = \int_0^x [f(t) + f(4-t)] dt$.

- Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το πλήθος των ριζών της.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η g είναι κυρτή ή κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής.
- Να υπολογίσετε το $g(4)$.
- Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{3}{4}$.

ΛΥΣΗ

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

Η $f(4-t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f(x) + f(4-x)$. Επειδή $f(x) > 0$ έχουμε ότι $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η g είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Προφανώς $g(0) = 0$ και η g γνήσια αύξουσα άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της g .

- $\forall x \in \mathbb{R}$ η g' είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγισίμων με

$$g''(x) = f'(x) + f'(4-x) \cdot (4-x)' = f'(x) - f'(4-x)$$

$$\text{Έχουμε } g''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(4-x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(4-x)$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η f' είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Από τη σχέση $f'(x) > f'(4-x)$ έχουμε $x > 4-x \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$

Δηλαδή

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$
g	$\cap$	$ $	$\cup$

Άρα η g είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ κυρτή στο $[2, +\infty)$ και έχει για $x = 2$ θέση σημείου καμπής.

- Έχουμε $g(x) = \int_0^x [f(t) + f(4-t)] dt$

$$\text{Άρα } g(4) = \int_0^4 [f(t) + f(4-t)] dt = \int_0^4 f(t) dt + \int_0^4 f(4-t) dt \quad \textcircled{1}$$

Έστω $4-t = u$ άρα $-dt = du \Leftrightarrow dt = -du$ όταν $t = 0$ το $u = 4$ και όταν $t = 4$ το $u = 0$

$$\text{τότε } \int_0^4 f(4-t) dt = -\int_4^0 f(u) du = \int_0^4 f(t) dt \quad \text{άρα η } \textcircled{1} \text{ γράφεται } g(4) = 2\int_0^4 f(t) dt = 6$$

- Έστω $h(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 4]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η h παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0, 4]$.

$$\text{Τότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει } x_0 \in (0, 4) \text{ τέτοιο ώστε } h'(x_0) = \frac{h(4) - h(0)}{4} = \frac{\int_0^4 f(t) dt}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Όμως } h'(x) = f(x) \text{ άρα } h'(x_0) = f(x_0) \text{ δηλαδή } f(x_0) = \frac{3}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω $f: [2, 4] \rightarrow [-2, 2]$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(2) = \frac{1}{2}$ και $f(4) = 1$.

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + xf(x)$, $x \in [2, 4]$.

Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$
- ii. Η εξίσωση $f'(x)(e^{f(x)} + x) + f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα
- iii. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g''(\xi) = f'(\xi)[e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) + 2]$

ΛΥΣΗ

- i. Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ ως παραγωγίσιμη και $-2 \leq f(x) \leq 2$. Από Θεώρημα Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in [2, 4]$ έτσι ώστε $f(x_1)$ ελάχιστο και $f(x_2)$ μέγιστο.

Επειδή $f(2) = \frac{1}{2}$ και $f(4) = 1$ έχουμε ότι $x_1, x_2 \in (2, 4)$ τότε από Θεώρημα Fermat $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγισίμων με

$$g'(x) = [e^{f(x)} + xf(x)]' = f'(x)e^{f(x)} + f(x) + f'(x)x$$

$$g'(x_1) = e^{f(x_1)} \cdot f'(x_1) + f(x_1) + x_1 f'(x_1) = f(x_1) = -2 \text{ γιατί } f(x_1) \text{ ελάχιστο}$$

$$g'(x_2) = e^{f(x_2)} \cdot f'(x_2) + f(x_2) + x_2 f'(x_2) = f(x_2) = 2 \text{ γιατί } f(x_2) \text{ μέγιστο}$$

$$\text{δηλαδή } g'(x_1) \cdot g'(x_2) = -4 < 0.$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (2, 4)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$

- ii. Από i. έχουμε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)[e^{f(x_0)} + x_0] + f(x_0) = 0$

- iii. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Από Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο

ώστε $f''(\xi) = 0$. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $g''(x) = f''(x) \cdot e^{f(x)} + (f'(x))^2 \cdot e^{f(x)} + 2f'(x) + x \cdot f''(x)$.

$$\text{Άρα } g''(\xi) = f''(\xi) \cdot e^{f(\xi)} + (f'(\xi))^2 \cdot e^{f(\xi)} + 2f'(\xi) + \xi \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2 \cdot e^{f(\xi)} + 2f'(\xi) = f'(\xi)[f'(\xi) \cdot e^{f(\xi)} + 2]$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ