

Άσκηση 1

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^{2012}(x) + 2012f(x) = e^{2x} + x^2 - 2x + 2012$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

- Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση

- Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Τότε για $x = x_0$ η (1) γίνεται:

$$f^{2012}(x_0) + 2012f(x_0) = e^{2x_0} + x_0^2 - 2x_0 + 2012 \Leftrightarrow e^{2x_0} + x_0^2 - 2x_0 + 1 + 2011 = 0 \Leftrightarrow e^{2x_0} + (x_0 - 1)^2 + 2011 = 0, \quad \text{άτοπο.}$$

Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Αφού η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα, υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2012 > 0$. Επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Και τα δύο μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Άρα έχουμε:

$$2012f^{2011}(x) \cdot f'(x) + 2012f'(x) = 2e^{2x} + 2x - 2 \Leftrightarrow 2012(f^{2011}(x) + 1)f'(x) = 2(e^{2x} + x - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x} + x - 1}{1006(f^{2011}(x) + 1)}$$

όπου: $1006(f^{2011}(x) + 1) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $g(x) = e^{2x} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 2e^{2x} + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$ και ότι $x > 0 \xrightarrow{g \nearrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$.

$$\text{Επομένως: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} + x - 1}{1006(f^{2011}(x) + 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{1006(f^{2011}(x) + 1)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} + x - 1}{1006(f^{2011}(x) + 1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{1006(f^{2011}(x) + 1)} > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\swarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

ελάχιστο

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή την $f(0)$.

- Από το ερώτημα (ii) φαίνεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι η ευθεία $y = f(0)$. Για $x = 0$ από την σχέση (1) έχουμε:

$$f^{2012}(0) + 2012f(0) = e^0 + 2012 \Leftrightarrow f^{2012}(0) + 2012f(0) - 2013 = 0 \quad (2).$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = x^{2012} + 2012x - 2013$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως πολωνυμική με $h'(x) = 2012x^{2011} + 2012 > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε και 1-1.

Επίσης, παρατηρούμε ότι $h(1) = 0$. Άρα $h(f(0)) = 0 \Leftrightarrow h(f(0)) = h(1) \xrightarrow{h:1-1} f(0) = 1$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι η ευθεία $y = 1$.

Άσκηση 2

- A.** Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- B.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πολυωνυμική συνάρτηση με $f(x) \cdot f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f δέχεται μία ακριβώς οριζόντια εφαπτομένη.
- Γ.** Έστω $P(x) = x^{2v+1} - 2x + 1$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι στο διάστημα $(0,1)$, η C_P τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

Λύση

- A.** Έχουμε $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0$, όπου v περιττός, συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.
Έστω $\alpha_v > 0$. Τότε:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha_v \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = -\infty$. Άρα υπάρχει $x_1 < 0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < 0$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha_v \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$, άρα υπάρχει $x_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_2) > 0$.
Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
Ανάλογα, αν $\alpha_v < 0$.
- B.** Έστω ότι η f είναι περιττού βαθμού τότε με τη βοήθεια του (A) υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, άτοπο γιατί $f(x) \cdot f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Τότε, η f είναι άρτιου βαθμού άρα η f' περιττού βαθμού, επομένως έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα x_1 .
Υποθέτουμε ότι η f' έχει και δεύτερη ρίζα x_2 με $x_1 \neq x_2$. Έστω $x_1 < x_2$.
Τότε η f' πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει $x_3 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_3) = 0$. Άτοπο επειδή $f(x) \cdot f''(x) \neq 0$.
Άρα, η f' έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η C_f δέχεται ακριβώς μια οριζόντια εφαπτομένη.
- Γ.** Παρατηρούμε ότι $P(1) = 0$. Άρα:
$$P(x) = x^{2v+1} - 2x + 1 = x^{2v+1} - x - x + 1 = x(x^{2v} - 1) - (x - 1) = x(x - 1)(x^{2v-1} + x^{2v-2} + \dots + 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^{2v} + x^{2v-1} + \dots + x - 1)$$

Έστω $Q(x) = x^{2v} + x^{2v-1} + \dots + x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυώνυμο με $Q(0) = -1$ και $Q(1) = 1 + 1 + \dots + 1 - 1 = 2v - 1 > 0$.
Αρά, από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $Q(x_0) = 0$.
Όμως $Q'(x) = 2vx^{2v-1} + (2v-1)x^{2v-2} + \dots + 1 > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$ άρα η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως το x_0 μοναδική ρίζα του Q άρα και του P .

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΛΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ