

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \ln^2 x - x + 1, x > 0$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $e + \ln \alpha > \alpha + \ln^2 \alpha$  για  $1 < \alpha < e$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται στο  $[1, +\infty)$ .

γ. Αν η αντίστροφη της  $f$  είναι συνεχής, να υπολογίσετε την παράσταση  $I = \int_{1-e}^0 f^{-1}(x)dx - \int_1^e f(x)dx$ .

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - 1 = \frac{1 - 2 \ln x - x}{x}, x > 0$ . Θεωρούμε συνάρτηση

$g(x) = 1 - 2 \ln x - x, x > 0$ . Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη με  $g'(x) = -\frac{2}{x} - 1 = -(\frac{2}{x} + 1) < 0$  για κάθε  $x > 0$ . Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

$\forall x \in (0, 1)$  έχουμε  $x < 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) = 0$  και για  $x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1) = 0$ . Όμως  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}, x > 0$

|      |   |   |           |
|------|---|---|-----------|
| $x$  | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'$ | + | 0 | -         |
| $f$  |   |   |           |

Αν  $1 < \alpha < e$  τότε  $f(\alpha) > f(e) \Leftrightarrow \ln \alpha - \ln^2 \alpha - \alpha + 1 > -e + 1 \Leftrightarrow e + \ln \alpha > \alpha + \ln^2 \alpha$ .

β. Στο διάστημα  $A = [1, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα  $f(A) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)]$ . Έχουμε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (1 - \ln x) - x + 1] = -\infty$  και  $f(1) = 0$ . Άρα  $f(A) = (-\infty, 0]$ . Οπότε η  $f$  είναι 1-1 και υπάρχει αντίστροφη  $f^{-1} : (-\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$ .

γ. Έστω  $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$  με  $dx = f'(u)du$ .

Αν  $x = 1 - e \Leftrightarrow f(u) = 1 - e \Leftrightarrow f(u) = f(e) \Leftrightarrow u = e$ .

Αν  $x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$ .

Άρα:

$$I = \int_{1-e}^0 f^{-1}(x)dx - \int_1^e f(x)dx = \int_e^1 u f'(u)du - \int_1^e f(x)dx = - \int_1^e u f'(u)du - \int_1^e f(x)dx =$$

$$= -[u f(u)]_1^e + \int_1^e f(x)dx - \int_1^e f(x)dx = -e f(e) + f(1) = -e(1 - e).$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(x) \geq 2012, \forall x \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  τέμνει την ευθεία με εξίσωση  $y = 2012x + 1$  σε ένα ακριβώς σημείο.

β. Να δείξετε ότι  $xf(x+1) \geq \int_0^{x+1} f(t)dt - f(x+1)$ .

## ΛΥΣΗ

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2011x - 1$ , με  $x \in \mathbb{R}$ . Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με  $g'(x) = f'(x) - 2011 \geq 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[x, 0]$  με  $x < 0$ , άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $x_1 \in (x, 0)$  τέτοιο ώστε

$$g'(x_1) = \frac{g(x) - g(0)}{x} \Leftrightarrow xg'(x_1) = g(x) - g(0) \Leftrightarrow g(x) = xg'(x_1) + g(0). \text{ Όμως } g'(x_1) \geq 1 \Leftrightarrow xg'(x_1) \leq x \Leftrightarrow$$

$$xg'(x_1) + g(0) \leq x + g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq x + g(0).$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + g(0)) = -\infty$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ .

Επομένως υπάρχει διάστημα της μορφής  $(-\infty, \alpha)$ , με  $\alpha < 0$  τέτοιο ώστε  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, \alpha)$ . Άρα  $g(\kappa) < 0$  με  $\kappa \in (-\infty, \alpha)$ .

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, x]$ , με  $x > 0$ , άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $x_2 \in (0, x)$  τέτοιο ώστε

$$g'(x_2) = \frac{g(x) - g(0)}{x} \Leftrightarrow xg'(x_2) = g(x) - g(0) \Leftrightarrow g(x) = xg'(x_2) + g(0). \text{ Όμως } g'(x_2) \geq 1 \Leftrightarrow xg'(x_2) \geq x \Leftrightarrow$$

$$xg'(x_2) + g(0) \geq x + g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq x + g(0).$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + g(0)) = +\infty$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

Επομένως υπάρχει διάστημα της μορφής  $(\theta, +\infty)$ , με  $\theta > 0$  τέτοιο ώστε  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\theta, +\infty)$ .

Άρα  $g(\lambda) > 0$  με  $\lambda \in (\theta, +\infty)$ .

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[\kappa, \lambda]$  και  $g(\kappa) \cdot g(\lambda) < 0$ . Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in [\kappa, \lambda]$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Το  $x_0$  είναι μοναδικό αφού η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα και «1-1».

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = xf(x+1) + f(x+1) - \int_0^{x+1} f(t)dt$  με  $x \in \mathbb{R}$ . Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα η  $\int_0^{x+1} f(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων. Τελικά η  $h$  είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με  $h'(x) = f(x+1) + xf'(x+1) + f'(x+1) - f(x+1) = (x+1) \cdot f'(x+1)$ .

Όμως  $f'(x) \geq 2012$  άρα  $f'(x+1) \geq 2012 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Άρα  $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$  τότε

|      |           |      |           |
|------|-----------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $h'$ | $-$       | $0$  | $+$       |
| $h$  |           |      |           |

Ελαχ.

Η  $h$  παρουσιάζει στο  $x_0 = -1$  ελάχιστο. Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$h(x) \geq h(-1) \Leftrightarrow xf(x+1) + f(x+1) - \int_0^{x+1} f(t)dt \geq -f(0) + f(0) - \int_0^0 f(t)dt \Leftrightarrow xf(x+1) - \int_0^{x+1} f(t)dt + f(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$xf(x+1) \geq \int_0^{x+1} f(t)dt - f(x+1).$$

### ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

**ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ**